

# Patrones y pautas en la naturaleza


Peter S. Stevens

Biblioteca  
Científica  
Salvat

Patrones y pautas  
en la naturaleza

P. S. Stevens

95



En una maravillosa síntesis de arte y ciencia, el autor explora los modelos universales con los que se expresa la naturaleza. Este libro nos propone un modo distinto y nuevo de ver y entender el mundo que nos rodea. Cuando observamos las analogías existentes entre la ramificación de los árboles, las del sistema arterial y las bifurcaciones de los ríos, o cuando nos apercebimos de las semejanzas que los cristales presentan con las pompas de jabón y las placas que recubren el caparazón de las tortugas, no podemos dejar de preguntarnos por qué la naturaleza utiliza únicamente un reducido número de formas afines en contextos tan diferentes.

El autor examina las espirales, las formas sinuosas, los modelos ramificados, etc. y explica cómo evolucionan de acuerdo con las leyes del flujo, la turbulencia, las fuerzas de tensión... y en función de las restricciones impuestas por el espacio tridimensional.

Peter S. Stevens es arquitecto, escultor, pintor y científico. A su vez es director del Architectural Planning Office for the Harvard Medical Area de la Universidad de Harvard.







# **Patrones y pautas en la naturaleza**

**Biblioteca  
Científica  
Salvat**





The Doctor

*Libros, Revistas, Intereses:*  
<http://thedoctorwho1967.blogspot.com.ar/>

# Patrones y pautas en la naturaleza

Peter S. Stevens

**SALVAT**



Versión española de la obra original norteamericana  
*Patterns in nature*, de Peter S. Stevens.  
publicada por Little, Brown & Company

Traducción: DIORKI  
Diseño de cubierta: Ferran Cartes / Montse Plass

ÍNDICE

<b>1. ESPACIO Y TAMAÑO . . . . .</b>	<b>1</b>
La naturaleza del espacio . . . . .	2
Curvatura. . . . .	5
Poliedros y mosaicos . . . . .	10
El efecto de la escala . . . . .	16
<b>2. DISEÑOS BÁSICOS . . . . .</b>	<b>41</b>
Diseños básicos . . . . .	41
Topología. . . . .	58
<b>3. TODO FLUYE . . . . .</b>	<b>63</b>
Turbulencia. . . . .	63
El número de Reynolds. . . . .	66
La turbulencia en el Universo. . . . .	69
Estelas de vórtices . . . . .	75
Tensión y flujo . . . . .	78
Fuerzas de tensión en la madera y en los huesos .	85
Tensión, flujo e ingeniería . . . . .	90
<b>4. ESPIRALES, FORMAS SINUOSAS Y EXPLOSIONES . . .</b>	<b>95</b>
Espirales . . . . .	95
Formas sinuosas . . . . .	109
Explosiones. . . . .	120

© 1995 Salvat Editores, S.A., Barcelona  
© 1974 by Peter S. Stevens  
ISBN: 84-345-8880-3 (Obra completa)  
ISBN: 84-345-8975-3 (Volumen 95)  
Depósito Legal: B-9195-1995  
Publicada por Salvat Editores, S.A., Barcelona  
Impresa por Printer, i.g.s.a. Abril 1995  
*Printed in Spain*



<b>5. MODELOS DE RAMIFICACIÓN.</b>	133
Ramificación al azar en ríos y árboles.	134
Topología de la ramificación aleatoria	144
Trabajo mínimo y ángulos en la ramificación	147
Árboles contruidos mediante módulos	157
Árboles formados según determinadas reglas	163
<b>6. ÁRBOLES</b>	169
Sistema de transporte en los árboles	170
Evolución de los árboles	174
Meristemos	181
Modelos básicos de crecimiento.	185
Filotaxis espiral.	196
<b>7. BURBUJAS Y POMPAS DE JABÓN</b>	211
Películas de jabón.	211
Superficies de separación	213
Superficies reducidas	220
Gránulos de cristal	225
Espuma.	231
Matemática de las burbujas	239
<b>8. AGRUPAMIENTO Y FRAGMENTACIÓN</b>	251
Agrupamiento compacto	251
Fragmentación	258
Analogías geológicas	263
Causas múltiples	270
<b>NOTAS A LOS CAPÍTULOS</b>	283

*A Joyce, David, Karl y Jean*



## AGRADECIMIENTOS

Este libro ha sido posible gracias a la generosidad tanto de la John Simon Guggenheim Memorial Foundation, que me concedió una beca, como de Eduard Sekler, quien me proporcionó una plaza en el Carpenter Center, que participa de las actividades del Departamento de Estudios Visuales y Ambientales de la Universidad de Harvard.

Tengo asimismo una gran deuda con mi hermano, S. S. Stevens, que revisó el manuscrito completo. Aunque no ha vivido para ver la obra finalizada, este libro es fruto de su interés. Agradezco igualmente a Rudolf Arnheim su cuidadosa lectura y valiosos comentarios, y a Arthur Loeb sus sugerencias.

Las discusiones realizadas dentro de un reducido grupo de profesores y estudiantes, los «Filomorfos», que estudiaban en Harvard la morfología de los cuerpos, constituyó un inapreciable estímulo para la obra. Junto con Arnheim y Loeb, el grupo contó entre sus filas como miembros regulares a Michael Woldenberg, Stephen Gould, Ranko Bon y Cyril Smith, este último del Instituto Tecnológico de Massachusetts (M.I.T.).

Deseo expresar mi agradecimiento a Didi Stevens, que realizó las gestiones pertinentes para que el manuscrito fuera mecanografiado, corregido y dispuesto para su publicación, y a Esther S. Yntema, que hizo posible que se llevara a cabo la realización de la obra.



# 1. ESPACIO Y TAMAÑO

*«Y esta nuestra vida, libre de públicos predilectos, proporciona lenguajes en los árboles, libros en los huidizos arroyos, sermones en las rocas, y utilidad por doquier».*

Shakespeare

*Como gustéis, Acto II, Escena 1*

Nuestro estudio va a centrarse en los diseños y formas que se presentan en el mundo natural. Estos diseños resultan ser particularmente restringidos, de modo que la inmensa variedad de formas que la Naturaleza crea surgen de la elaboración y reelaboración de un reducido número de temas básicos. Tales limitaciones son las que confieren armonía y belleza al mundo natural.

Puede resultar curioso el hecho de resaltar precisamente las limitaciones de la Naturaleza cuando una simple ojeada a nuestro entorno revela una abrumadora diversidad. Nubes y pájaros carboneros, galaxias y saltamontes, anguilas y olmos: uno no puede sustraerse a la impresión que semejante variedad suscita. Incluso entre aquellos objetos en apariencia semejantes, como los copos de nieve o las hojas de un mismo árbol, hallamos sutiles diferencias que hacen de cada uno de ellos algo único.

Pero cuando posteriormente observamos las analogías existentes entre la ramificación de los árboles, las del sistema arterial y las bifurcaciones de los ríos; o las semejanzas que los cristales presentan con las pompas de jabón y las placas que forman el caparazón de las tortugas; o cómo los frondes jóvenes de los helechos, gran número de galaxias y el agua que se vacía por el desagüe muestran formas espirales similares, no podemos dejar de preguntarnos por qué la Naturaleza utiliza únicamente un reducido número de formas afines en contextos tan diferentes. ¿Por qué razón tanto las serpientes como los ríos o los lazos de una cuerda adoptan el mismo patrón ondulante, sinuoso, y por qué las grietas producidas en el fango seco y el reticu-



lado de la piel de las jirafas se ordenan de manera similar a como lo hacen las películas de espuma constituidas por burbujas?

En materia de diseños observamos que la Naturaleza tiene preferencias, entre las cuales se hallan las espirales, las formas serpenteantes y sinuosas, las ramificaciones y las uniones de  $120^\circ$ , diseños que se repiten una y otra vez. En este sentido, la Naturaleza obra como un productor teatral que presentara cada noche a los mismos actores caracterizados de forma diferente según sus distintos papeles. Los actores disponen de un repertorio limitado: los pentágonos constituyen la mayor parte de las flores pero no se hallan en los cristales; los hexágonos predominan en la mayoría de los diseños repetitivos bidimensionales pero nunca forman por sí solos estructuras espaciales, tridimensionales. En la vertiente contraria, la espiral es el culmen de la versatilidad e interviene tanto en la replicación de los virus como en la ordenación de la materia que forma las galaxias.

Una mirada detrás de las candilejas revela que la Naturaleza no tiene elección a la hora de asignar los papeles a los actores. Sus producciones se hallan limitadas por la escasez de los recursos y por las restricciones impuestas por el espacio tridimensional, así como por las relaciones existentes entre los distintos tamaños de los objetos y por un peculiar sentido de austeridad. Dentro del dominio de la Naturaleza, sólo pueden formarse cinco tipos de poliedros regulares, y ninguno más. De la misma forma, únicamente existen siete sistemas cristalinos y nunca aparece un octavo. El tamaño absoluto determina que el león no puede volar ni el petirrojo rugir. Todos y cada uno de los elementos que forman parte de las distintas acciones que acontecen en el Universo deben atenerse a las reglas establecidas.

### La naturaleza del espacio

*«Nada me confunde más que el tiempo y el espacio; y, a pesar de todo, nada me preocupa menos, ya que nunca pienso en ellos.»*

Charles Lamb

De todas las restricciones a que es sometida la Naturaleza, las más trascendentes vienen impuestas por el espacio, cuya estructura

ejerce una influencia decisiva sobre la forma que tienen los cuerpos.

La idea de que el espacio posea una estructura puede resultar extraña, ya que por lo general concebimos el espacio como una especie de nada, precisamente la ausencia de todo tipo de estructura, la vacuidad misma dentro de un ámbito igualmente vacío, como si constituyera el telón de fondo pasivo para los cambios que se producen en el mundo material.

Sin embargo, resulta que este supuesto telón de fondo, la nada que por todo se extiende, no es pasiva en modo alguno. Esta nada presenta una arquitectura que tiene requerimientos reales con respecto a los cuerpos que la ocupan. Cada forma, cada diseño, cada objeto ha de pagar un precio por el mero hecho de existir, el cual consiste en adaptarse a los dictados estructurales del espacio.

Nuestra ignorancia sobre los efectos del espacio es similar a la del pez acerca del efecto producido por el agua, y así como este último comprendería mejor su entorno si pudiera entender conceptos tales como flotabilidad, presión e hidrodinámica de los distintos líquidos, nuestro conocimiento del medio en que vivimos será más completo si estudiamos la transformación, extensión y curvatura experimentadas por los diferentes espacios. El carácter especial que tiene nuestro espacio dentro del Universo no fue reconocido hasta que los partidarios de las geometrías no euclídeas en el siglo XIX y Einstein en el XX demostraron la existencia de otros espacios, y que los diseños y formas existentes en ellos difieren de los que percibimos en el nuestro. Puesto que tanto nuestros cerebros como nuestros procesos de percepción han evolucionado para adaptarse al espacio en que nos movemos, somos incapaces de visualizar espacios distintos al nuestro, si bien la mente humana ha logrado concebir descripciones matemáticas coherentes de aquéllos. De esta forma se ha podido determinar que tanto la realidad espacial del microcosmos, el mundo de las partículas fundamentales, como la del macrocosmos, el Universo considerado como un todo, difieren notablemente del espacio en el cual vivimos.

De hecho, la determinación de qué clase de sustancia constituye el espacio y cómo afecta a la forma de los cuerpos representan cuestiones acuciantes en la física moderna. Al finalizar el pasado siglo, Mendeléiev, que descubrió la periodicidad de los elementos, formuló la



idea de que el espacio se componía de partículas un millón de veces menores que el átomo de hidrógeno, la combinación de las cuales daría lugar a los átomos, hipótesis en verdad extraña a las concepciones de la época. Mendeléiev, como vemos, no afirmó que el espacio estuviera *lleno* de diminutas partículas, sino que *estaba formado* por dichas partículas. P. A. M. Dirac, John A. Wheeler y otros físicos han desarrollado la hipótesis de Mendeléiev y han llegado a comparar el espacio con una serie quizás infinita de minúsculos gránulos o con una sustancia de naturaleza similar a la de una espuma formada por finas burbujas. Podría ser que, de algún modo, el desplazamiento de tales gránulos o burbujas originara las partículas fundamentales, que constituyen la base de todas las estructuras materiales.

Cada vez en mayor medida, la idea de que el espacio tiene una estructura material real parece ganar prestigio en el ámbito de la física, aunque tal concepción resulte extraña para la mayoría de la gente. El espacio ha dejado de ser considerado como un escenario pasivo o un mero sistema de coordenadas; ahora se concibe como un agente real que da origen al resto del mundo material. Sería la sustancia primaria de la cual surgiría todo. De esta forma, la idea más inmediata que nuestro sentido común nos dicta acerca del espacio como una gran nada se ha visto sustituida por la concepción más elaborada que presenta el espacio como un gran todo. Wheeler ha sintetizado con acierto las ideas de Einstein:

«Einstein, más allá de su trabajo y de sus escritos, mantuvo una visión a largo plazo: no existe nada en el Universo a excepción del espacio vacío curvo. La geometría curva describe aquí en cierta forma la gravitación. Sometida en otras condiciones a un movimiento ondulatorio manifiesta todas las propiedades de una onda electromagnética. Excitada en un contexto diferente, la materia mágica que es el espacio se comporta como una partícula. Nada hay que sea ajeno y "físico" inmerso en el espacio.»

E insiste:

«No existe nada en el Universo que no sea el espacio curvo vacío. Materia, carga, electromagnetismo y otros diversos campos son sólo manifestaciones de la curvatura del espacio.»

Wheeler va aún más lejos y supone que el espacio de nuestro Universo es tan sólo uno más dentro de un número infinito de espacios, semejante, por tanto, a un punto del hiperespacio, el cual representaría la totalidad de las posibilidades espaciales. Y cuando el Universo, tras su actual expansión, se contraiga y vuelva a expandirse de nuevo, presentará con toda probabilidad un carácter espacial distinto y, consiguientemente, contendrá formas muy diferentes a las que ahora nos son familiares.

De esta manera, el espacio, esa realidad que confundía a Charles Lamb y en la cual prefería no pensar, se halla en el centro mismo de los problemas planteados por los físicos contemporáneos. Dejemos a éstos la exploración de tan vasto laberinto y, en vez de ahondar aún más en lo que para nosotros resulta invisible, permanezcamos en los límites del mundo que podemos ver, donde también descubriremos que estamos sometidos a las propiedades del espacio.

### Curvatura

«... y la Naturaleza ha de obedecer a la necesidad.»  
Julio César, Acto IV, Escena 3.  
Shakespeare

El espacio es uniforme en toda su extensión: es el mismo en cualquier punto. Nos damos cuenta de cómo dicha extensión afecta a la forma de los cuerpos cuando moldeamos un trozo de arcilla.

Vamos a suponer que hacemos un pequeño disco de arcilla, como el que aparece en la figura 1a. Presionando con un rodillo podemos extender la arcilla para formar un disco mayor. Bajo la acción del rodillo, la arcilla se extiende de modo uniforme en todas las direcciones (como el espacio en el cual se encuentra).

Ahora, vamos a presionar o aplastar con los dedos sólo la parte central del disco. Esta presión hace que el centro se expanda y que lo haga con mayor rapidez que la periferia, con lo que el disco adopta la forma de un cuenco, como puede verse en la figura 1b.

También podemos aplastar la periferia del disco de modo que la expansión de ésta sea más rápida que la de la región central. Nuevamente observamos que la forma adoptada por la arcilla no es plana,



sino que al empujar la masa simultáneamente hacia delante y hacia atrás se obtiene una figura cuya apariencia semeja una silla de montar. Esta nueva forma se ha obtenido de manera tan natural como la anterior, sin necesidad de moldear expresamente la arcilla para conseguirla, sino tan sólo presionando en determinados puntos. Manipulando este pedazo de arcilla, hemos descubierto una regla fundamental: si el centro y la periferia crecen a la misma velocidad, el material se expande en un plano; si el centro lo hace más deprisa que la periferia, o viceversa, surgen figuras en forma de cuenco o de silla de montar, respectivamente.

He aquí otra manifestación del mismo principio. Cuando se manipulan figuras planas formadas por triángulos equiláteros, observamos que podemos ordenar perfectamente seis triángulos alrededor de un punto central de forma que todos ellos se sitúen en un plano, como muestra la figura 1d. Cinco triángulos alrededor de un punto

Fig. 1

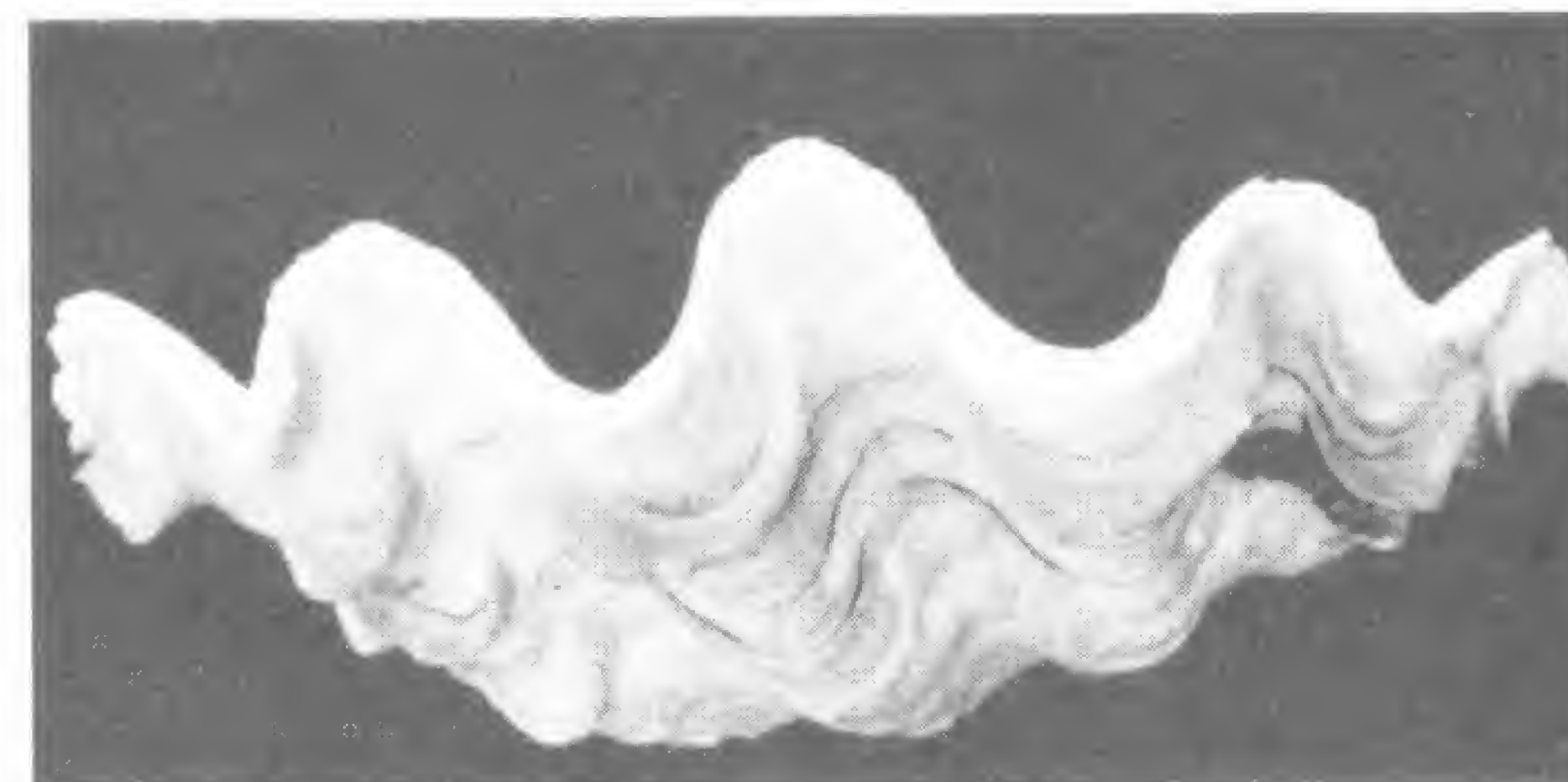
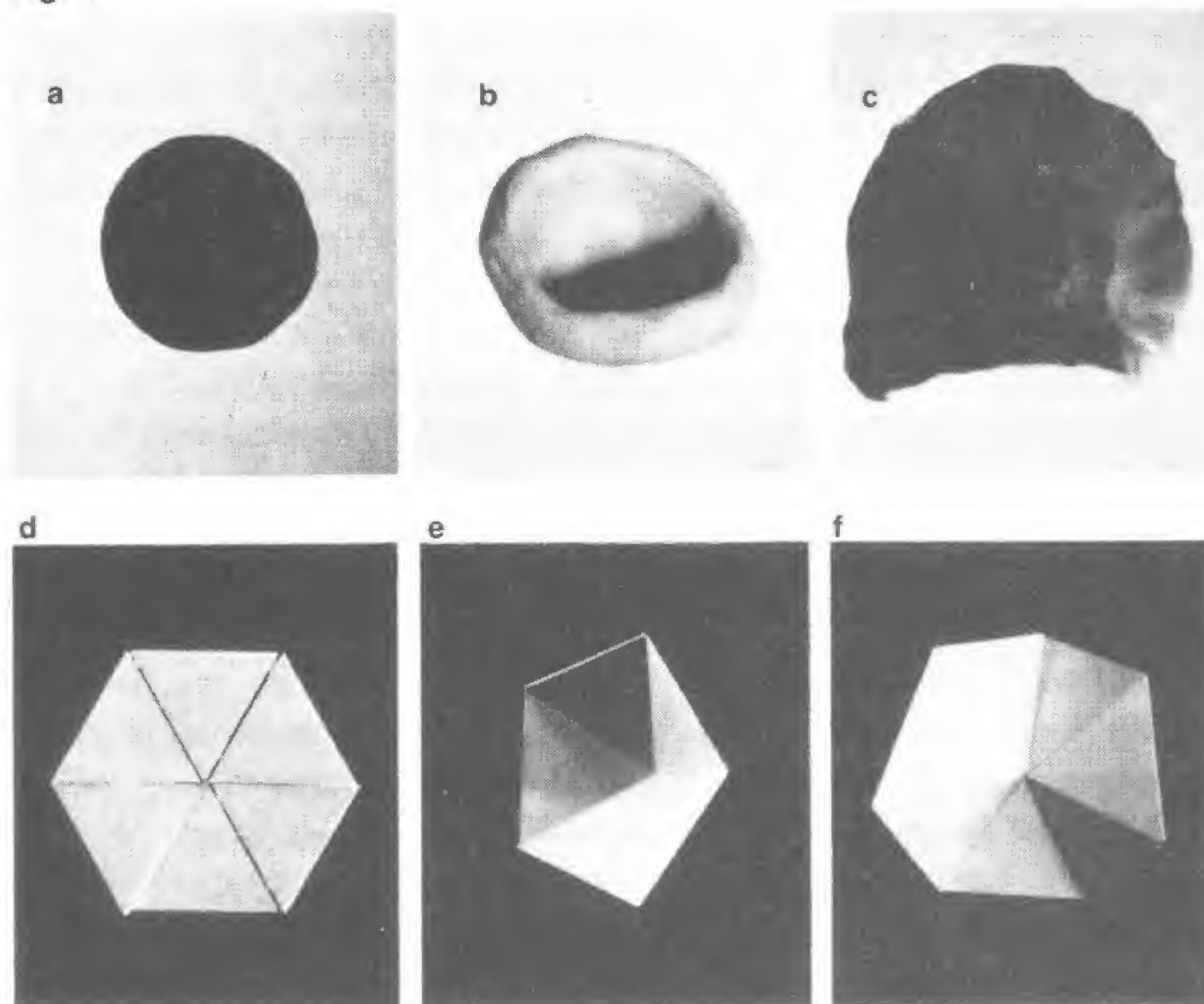


Fig. 2

central adoptan, sin embargo, la forma de una tienda de campaña o un cuenco invertido (fig. 1e), y siete triángulos forman una silla de montar ondulante (fig. 1f). El resultado es el mismo que en el caso de la arcilla: al variar la extensión de la periferia con respecto a la del centro, los planos adquieren superficies cóncavas y convexas.

La causa de estas transformaciones radica en la naturaleza del espacio, y no dependen de nuestras preferencias por una u otra forma. Hagamos lo que hagamos, no podemos obtener una forma de silla de montar a partir de cinco triángulos equiláteros o una simple copa con siete triángulos.

La propia Naturaleza se halla limitada de una forma similar, y no construye por tanto una u otra figura por mero capricho, sino por necesidad, tal y como le dicta la distribución de los materiales. Observe-mos, por ejemplo, la concha que aparece en la figura 2. Debido a que su periferia crece a mayor velocidad que el centro, la concha experimenta un plegamiento y se arruga. No existen genes que transmitan la forma exacta en que tienen que disponerse los pliegues, ni tampoco se contienen en ellos las características morfológicas que va a presentar la concha. Su acción se reduce en este caso inducir un crecimiento más rápido de la periferia en relación con el centro.

Diferencias similares de crecimiento rigen el desarrollo de estructuras más complejas, como la concha cartilaginosa del pabellón de la oreja humana, que aparece en la figura 3. Los repliegues de la misma surgen de manera análoga al proceso por el que se forman las





Fig. 3

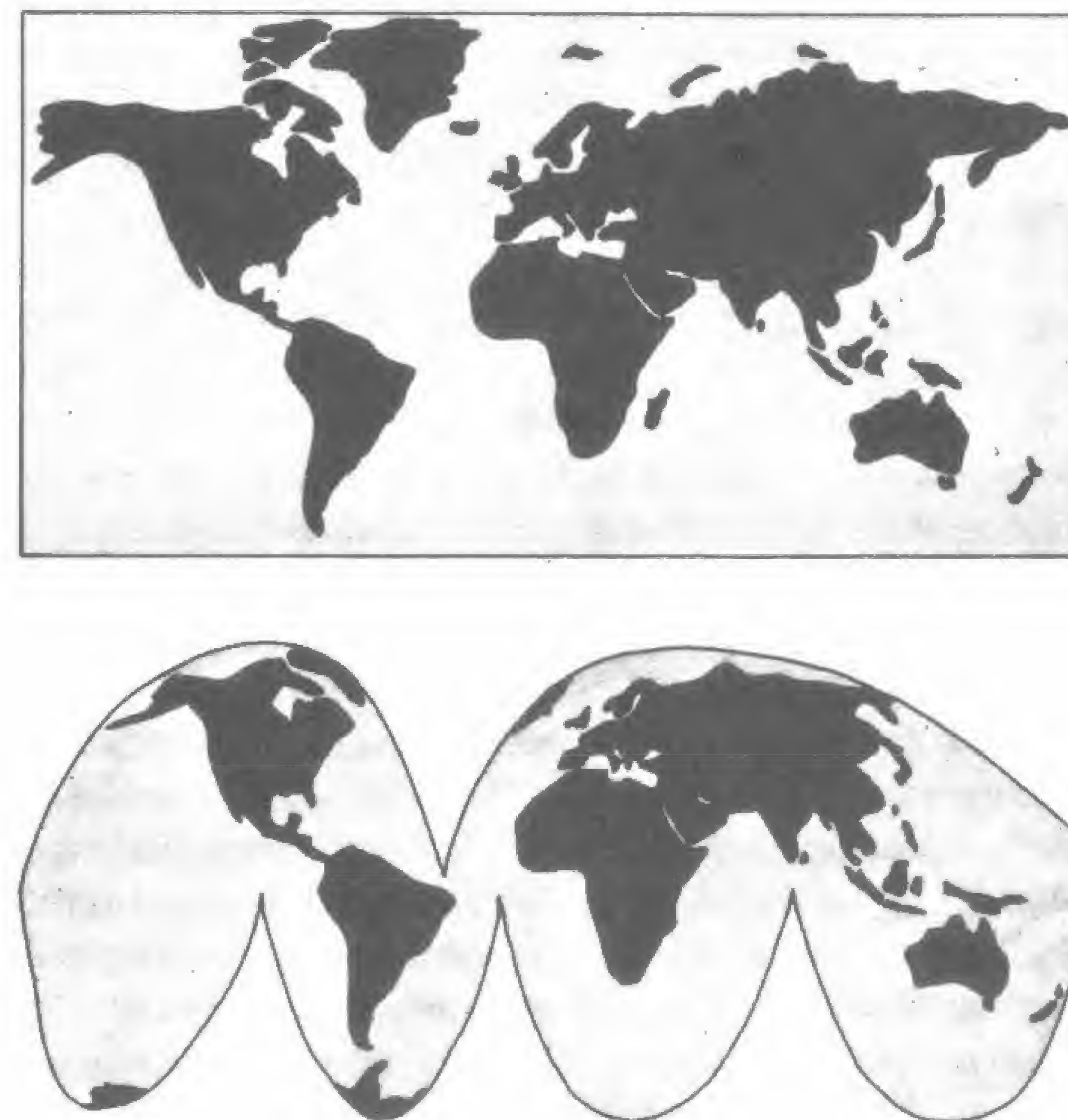
ondulaciones en un trozo de papel rociado con agua. Tanto el tejido vivo como el papel se curvan y deforman de acuerdo con la expansión diferencial que experimentan sus superficies.

Las figuras en forma de copa o de silla de montar nos proporcionan aún más enseñanzas sobre la naturaleza del espacio. Vamos a suponer que deseamos aplanar la figura que tiene forma de copa. Para ello podemos hacer dos cosas: o bien estirar la región periférica de la misma de manera que se expanda hasta quedar a la altura del centro, o bien practicar una serie de incisiones en el borde hasta que éste quede dentado y así poder aplanar la figura. Tanto una como otra posibilidad, o ambas a un tiempo, reflejan la vieja dificultad existente a la hora de cartografiar la superficie terrestre, que es esférica, sobre un plano, para lo cual dicha superficie debe ser distorsionada o cortada (fig. 4). La razón por la que no resulta posible trazar el mapa de la Tierra en un papel sin introducir determinadas correcciones

estriba en que las formas aparecen más compactas y agrupadas en las áreas periféricas de una zona dada cuando se disponen sobre una esfera que cuando se distribuyen en un plano. Los detalles en los márgenes de una área esférica se hallan demasiado agrupados debido a la propia naturaleza de las superficies curvas, como para corresponderse punto por punto con la representación de dicha área en un plano. Si la superficie de la Tierra tuviera la forma de una silla de montar, se plantearía el problema contrario. Al intentar llevar al plano una figura semejante, la región periférica se plegaría y doblaría debido a que la misma se encuentra excesivamente esparcida.

Lo que observamos mediante estos ejemplos es que el crecimien-

Fig. 4





to diferencial determina la forma o la curvatura de una superficie. Los efectos de las diferencias de crecimiento pueden apreciarse directamente en superficies bidimensionales, ya que somos capaces de percibir éstas inmersas en el espacio tridimensional o rodeadas por el mismo. Ahora bien, el principio por el cual diferencias en el crecimiento de una parte de un cuerpo con respecto a otra producen curvaturas se aplica asimismo al espacio tridimensional, pero, en este caso, para apreciar sus efectos tendríamos que poder percibir el espacio que nos rodea en el marco de una realidad espacial de cuatro dimensiones, lo que se halla muy lejos de nuestras capacidades.

Sin embargo, podemos describir de forma matemática la curvatura de un espacio tridimensional de manera satisfactoria. Einstein, por ejemplo, llegó a la conclusión de que el Universo tiene una curvatura espacio-tiempo de cuatro dimensiones, análoga a la curvatura de una esfera. Otras teorías conciben el Universo con una forma más parecida a la de una silla de montar. En cualquier caso, la realidad es que la estructura del espacio y la naturaleza del mundo visible se hallan indisolublemente unidas.

### Poliedros y mosaicos

La construcción de una figura en forma de copa abierta a partir de cinco triángulos equiláteros plantea una interesante cuestión. Si proseguimos añadiendo triángulos a los bordes de aquélla, ¿llegará la copa a cerrarse sobre sí misma? La respuesta es afirmativa. En efecto, quince triángulos adicionales empalmados de cinco en cinco a los bordes constituirán una figura cerrada, un poliedro regular con veinte caras triangulares, como el que aparece en el extremo superior derecho de la figura 5. Cuando se construye dicho poliedro lo primero que llama la atención es el hecho de que todos los triángulos encajen perfectamente y se dispongan cada uno en su lugar de una forma precisa. No es necesario retocar ninguna arista, forzar ningún ángulo ni realizar rectificación alguna. Un poliedro así resulta ser bellamente unívoco: o es perfecto o no es tal poliedro. Las condiciones que lo han hecho posible fueron determinadas cuando el Universo comenzó a existir.

Es posible también unir triángulos de tercer y de cuarto orden

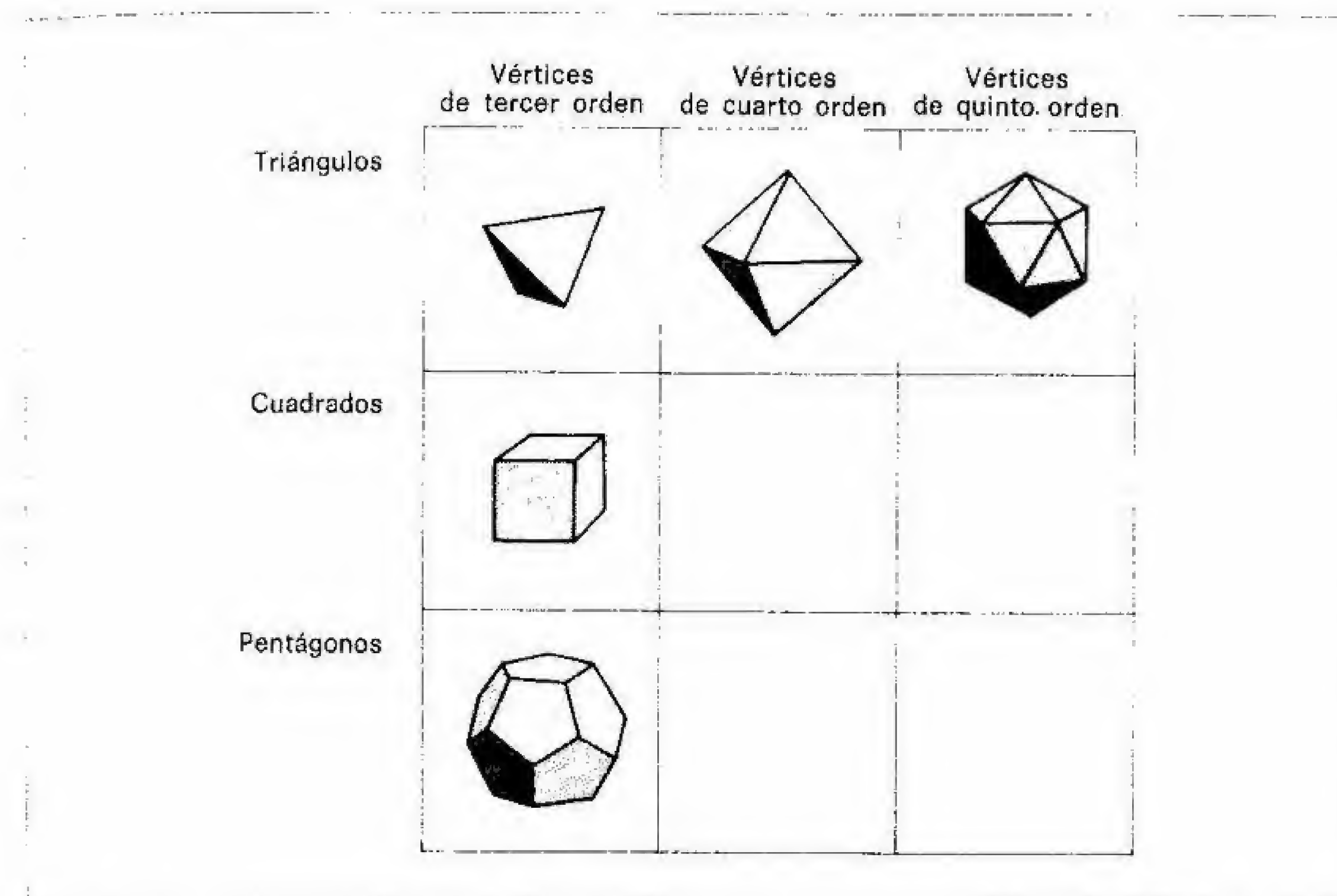


Fig. 5

para formar tetraedros, de cuatro caras, y octaedros, de ocho caras. De forma similar, al agrupar cuadrados de tercer orden obtenemos cubos, y al hacer lo propio con pentágonos regulares formamos dodecaedros. En conjunto, obtenemos cinco poliedros regulares convexos, representados en la figura 5. Cada uno de ellos tiene caras y ángulos regulares, y son conocidos desde la época de los griegos. Hasta hoy no se ha podido añadir ninguna figura nueva de características similares a las cinco citadas, y nunca podrán añadirse. Es imposible construir una figura tridimensional cerrada a partir de polígonos de seis, siete u ocho lados o cualquier otra figura regular plana. El espacio sólo permite la construcción de las cinco formas regulares citadas. Como se muestra en la figura, tres de dichas formas presentan vértices de tercer orden, en los cuales confluyen tres aristas, mientras que las dos restantes poseen en un caso vértices de cuarto orden, y en otro, de quinto. Ninguna tiene vértices en los que confluyan más de cinco elementos, así como tampoco aparecen caras de más de cinco aristas.

Agrupando figuras regulares planas de varios tipos, al tiempo que



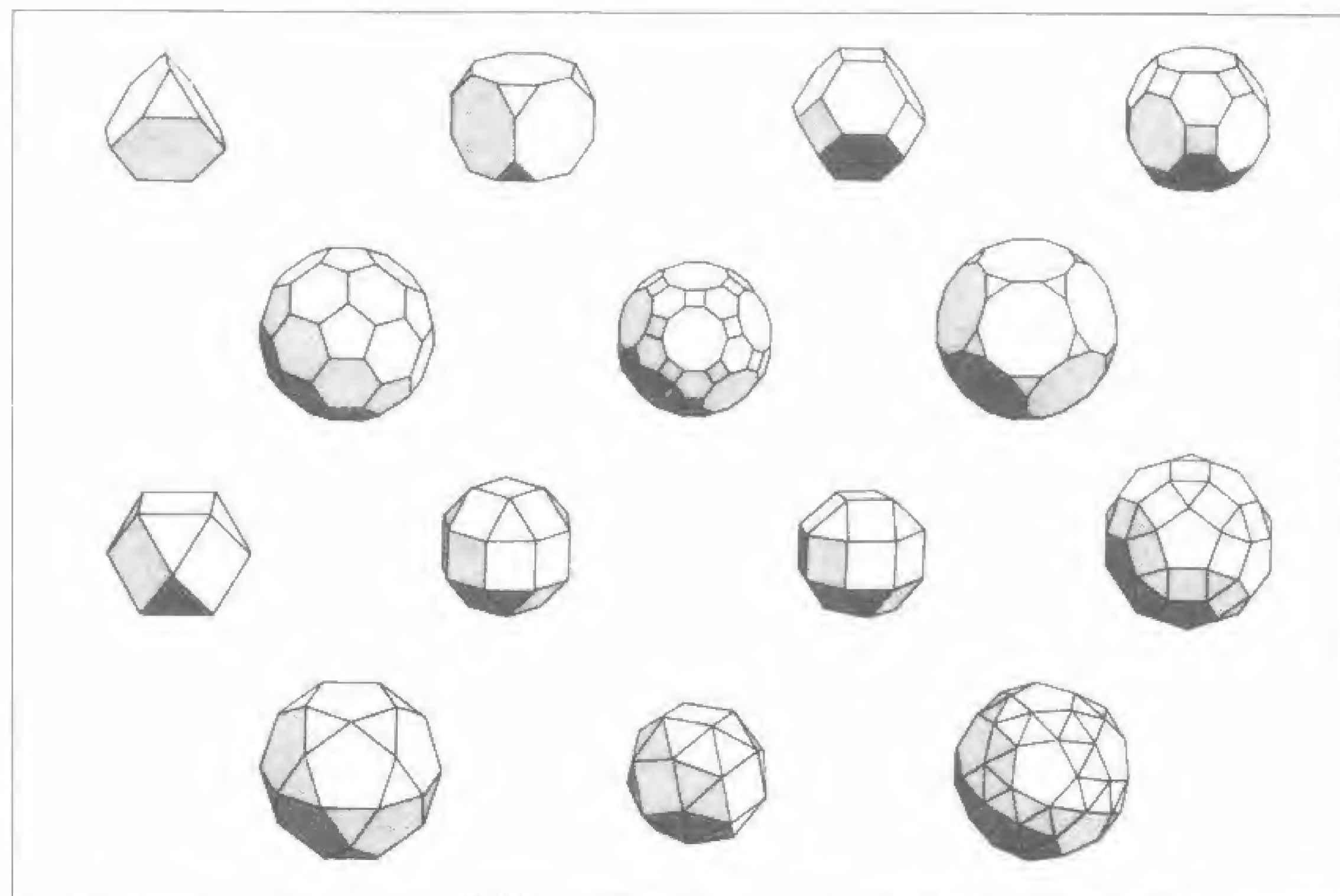


Fig. 6

se mantienen las características de los vértices, podemos, por supuesto, construir otros poliedros, en este caso semirregulares. Pero de nuevo observamos que las posibilidades son limitadas. Excluyendo los prismas, es posible formar únicamente los catorce poliedros semirregulares que aparecen en la figura 6, y ninguno más.

He aquí algunas limitaciones que se aprecian en estas figuras. Cada forma tiene vértices de tercer, cuarto o quinto orden y algunas caras con tres, cuatro o cinco aristas. Si existen triángulos o hexágonos, se hallan siempre en múltiplos de cuatro: su número es de cuatro, ocho, veinte, treinta y dos u ochenta. Los cuadrados y octágonos se dan en múltiplos de seis: seis, doce, dieciocho o treinta. Si hay pentágonos o decágonos presentes, su número será de doce. Ninguna forma posee caras con siete, nueve, once o un número superior de aristas.

Nuevas limitaciones respecto a la forma en que los diversos elementos pueden unirse aparecen cuando se combinan poliedros regulares y semirregulares a fin de llenar todo el espacio sin dejar discontinuidades o huecos entre ellos. Incluyendo las combinaciones

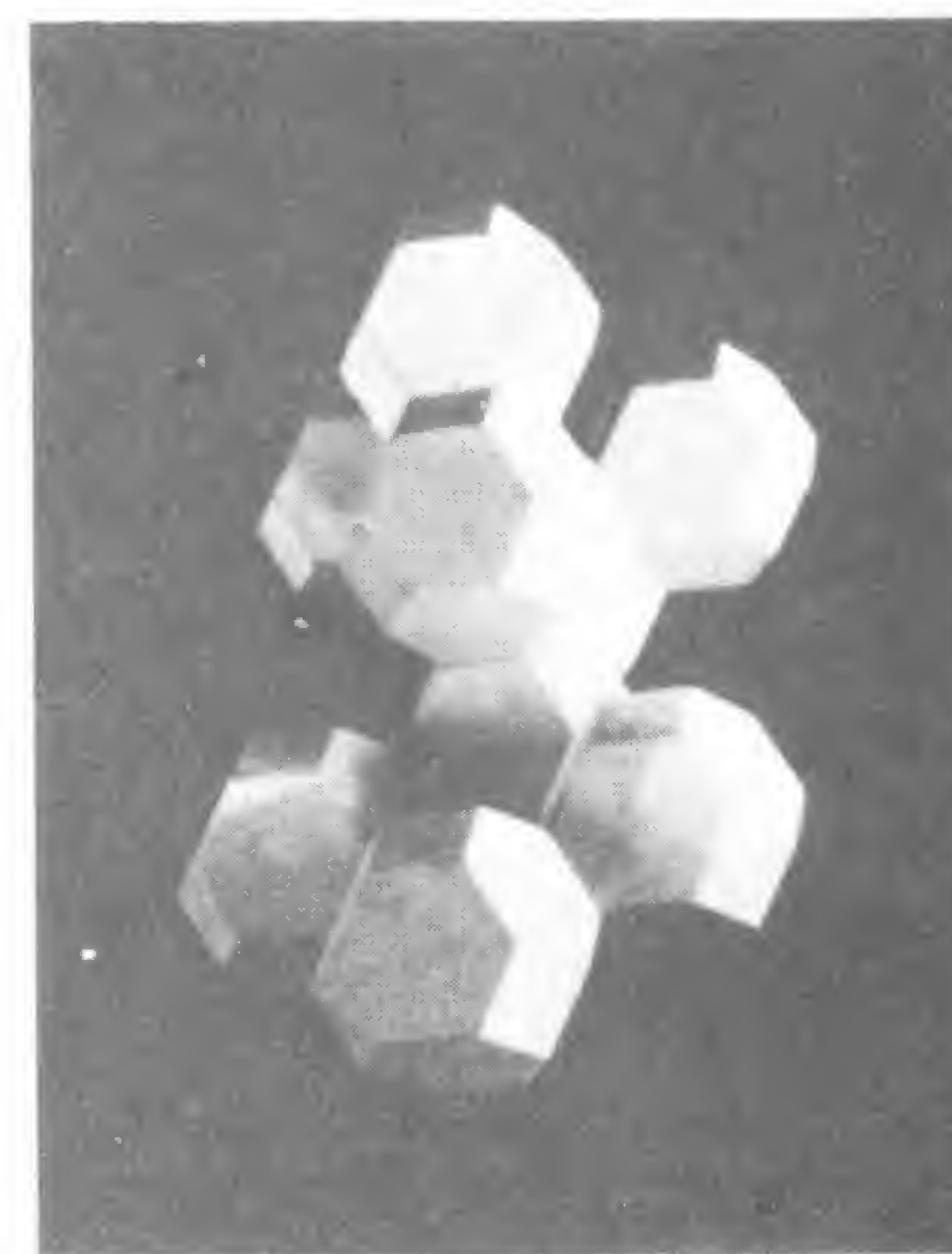


Fig. 7

que utilizan prismas regulares (formas que poseen polígonos regulares en sus dos bases y cuyas áreas laterales las componen figuras rectangulares), encontramos que sólo veintidós grupos cumplen dicha condición. Únicamente pueden utilizarse poliedros que posean algunas caras triangulares o cuadradas y nunca poliedros con caras pentagonales. En la figura 7 se muestra un fragmento de una de estas agrupaciones, consistente en un conjunto de octaedros truncados que describen la geometría molecular de los silicatos de aluminio y la conformación estadística ideal de la espuma de jabón, que investigaremos más adelante.

Análogo al número limitado de poliedros regulares y semirregulares es el número, asimismo limitado, de mosaicos bidimensionales regulares y semirregulares que pueden formarse. Un fragmento de uno de tales mosaicos aparece en el grupo de seis triángulos equiláteros de la figura 1d. Los triángulos se disponen sobre un plano y al añadir nuevos triángulos, manteniendo seis alrededor de cada punto, podemos extender la serie tanto como queramos en cualquier dirección. Una pequeña investigación revela la existencia de sólo otros



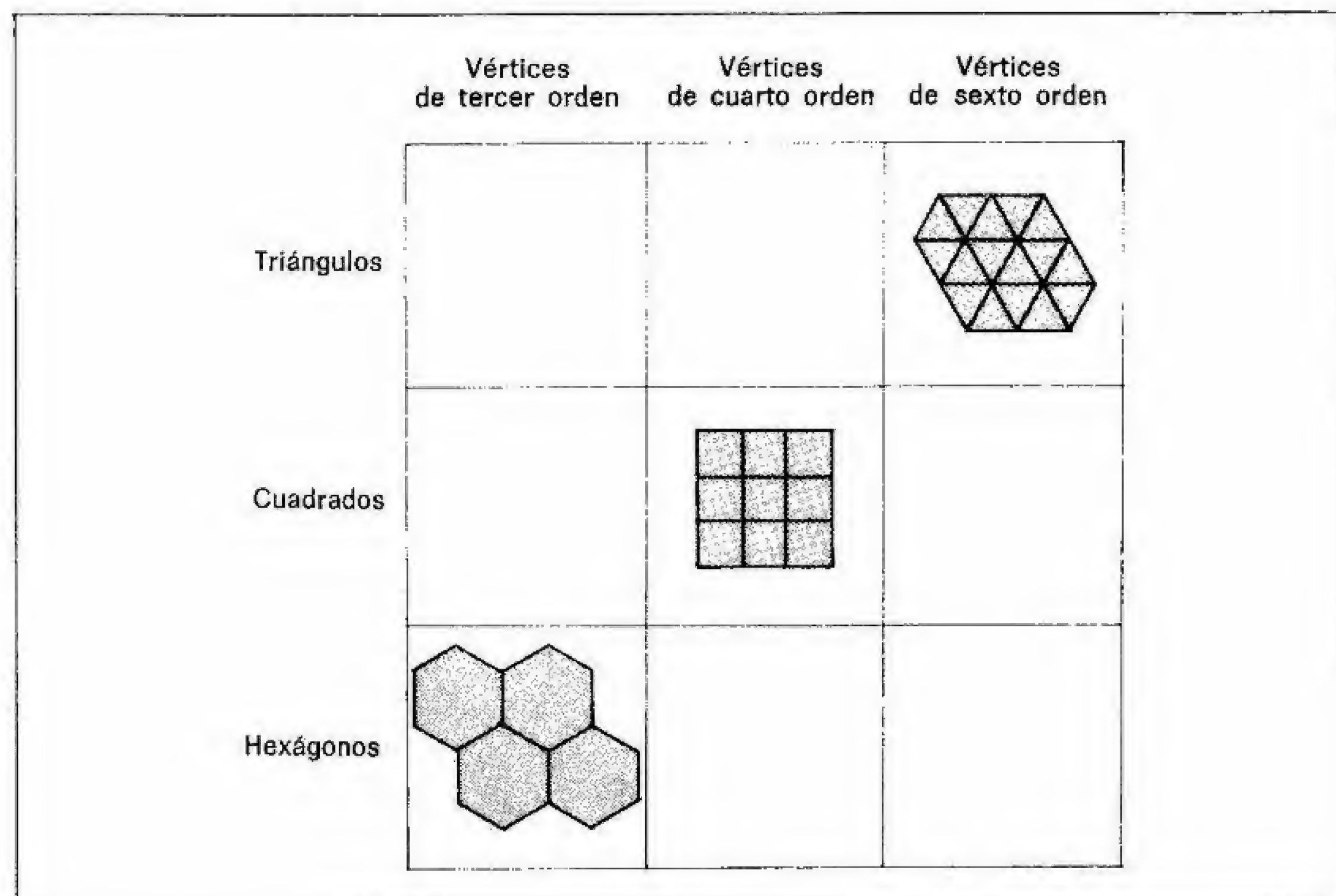


Fig. 8

dos mosaicos constituidos por elementos regulares e idénticos que pueden extenderse indefinidamente. Los tres se muestran en la figura 8. De la misma forma, hallamos sólo ocho mosaicos semirregulares que combinan polígonos regulares de más de un tipo manteniendo las características de sus uniones: aparecen en la figura 9. Cada uno de estos mosaicos combina triángulos o cuadrados, o ambos, y únicamente aparecen vértices de tercer, cuarto o quinto orden.

Es importante señalar la ausencia de pentágonos en los grupos de mosaicos regulares y semirregulares. Los pentágonos no se combinan entre sí o con otras figuras regulares para ocupar todo el espacio, de forma que los poliedros que poseen caras pentagonales no pueden unirse a otros y llenar el espacio de manera continua. Así, observamos que los cristales, que son conjuntos de moléculas cuya estructura se repite, nunca presentan caras de cinco lados. De hecho, ninguna forma inanimada muestra una simetría pentagonal, y, por ejemplo, jamás ha caído del cielo ningún copo de nieve en el que la estructura de sus cristales de hielo tuviera dicha disposición. Sólo

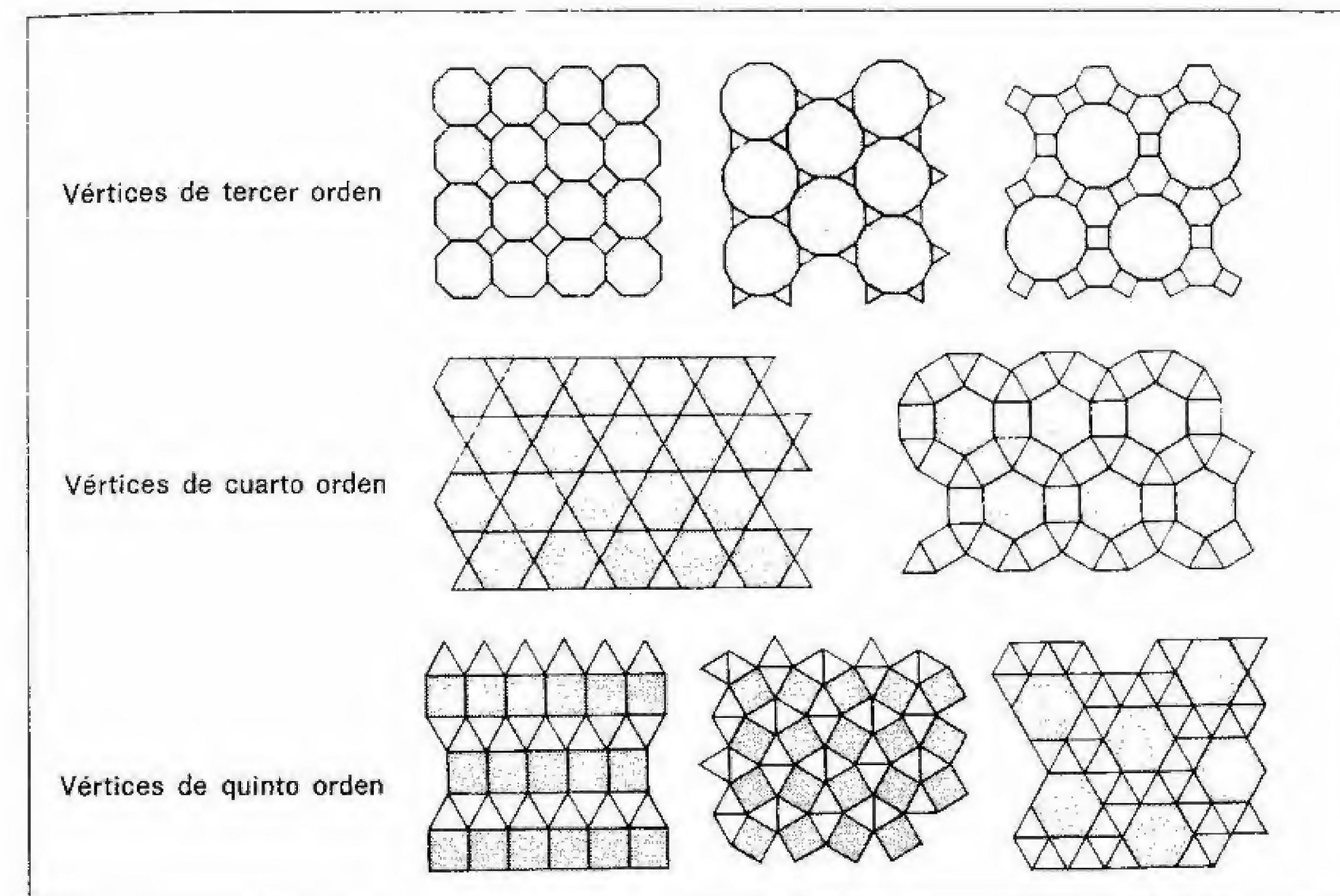


Fig. 9

las formas animadas, complejas y cuyas estructuras constituyen algo más que un simple apilamiento de moléculas idénticas, ofrecen morfologías pentámeras.

Tanto los mosaicos regulares y semirregulares como los poliedros proporcionan la prueba más concluyente de que las formas de la Naturaleza son limitadas. Sin embargo, rara vez necesita ésta crear figuras tan perfectas, al igual que tampoco precisa trabajar con triángulos equiláteros o moldear formas con ángulos idénticos. Por lo general, la Naturaleza introduce variaciones, fuerza algunos elementos, mueve otros, añade o retira partes, pero siempre, en sus distintas manipulaciones, ha de atenerse a la cantidad de material disponible. Sus planos y sus diseños cóncavos o convexos pueden no extenderse hasta el infinito, o bien constituir poliedros perfectos, o curvarse con absoluta precisión, pero tanto al disponerse sobre un plano como al plegarse sobre sí mismos o alabearse deben hacerlo según las estrictas y restringidas leyes en virtud de las cuales el material puede distribuirse en el espacio.



El efecto de la escala

«A partir de lo ya demostrado, resulta claramente perceptible la imposibilidad existente para que las estructuras aumenten su tamaño hasta alcanzar vastas dimensiones, ya sea en el arte o en la Naturaleza. Algo similar ocurre en la construcción de navíos, palacios o templos de enormes proporciones, de manera tal que sus remos, patios, vigas, juntas y demás partes constitutivas, según los casos, se mantengan unidas. Tampoco puede la Naturaleza producir árboles de extraordinaria envergadura, debido a que las ramas cederían bajo su propio peso; ni formar estructuras óseas en el hombre, los caballos u otros animales de manera tal que se mantuvieran unidas y cumplieran sus funciones normales en caso de que dichos animales aumentaran su tamaño de modo desproporcionado. Este incremento sólo puede llevarse a cabo utilizando un material más duro y fuerte que el usual o bien alargando los huesos, por lo que tal cambio en la forma y apariencia de los animales más parecería una monstruosidad.»

Galileo

El efecto de la magnitud o tamaño absoluto como determinante de la forma muestra de nuevo cómo el espacio modela los cuerpos a nuestro alrededor. Al estudiar los poliedros hemos ignorado la magnitud y hemos supuesto que un cubo es siempre un cubo, no importa cuál sea su tamaño. Sin embargo, encontramos que las relaciones geométricas derivadas de una diferencia de tamaño afectan al comportamiento de la estructura, y así un cubo grande es relativamente más débil que otro pequeño. También hallamos, como consecuencia lógica, que, para mantener las mismas características estructurales, toda diferencia que se produzca con respecto al tamaño ha de ir acompañada de una diferencia correspondiente en cuanto a la forma.

Para entender los efectos del tamaño y cómo los mismos se deri-

van de la propia extensión del espacio, consideremos de nuevo los poliedros regulares representados en la figura 5. La siguiente tabla muestra las áreas y volúmenes respectivos de estos sólidos, donde se ha tomado como base de comparación la dimensión  $d$ , que es la longitud de una arista. El tetraedro, el octaedro y el icosaedro son los sólidos que poseen cuatro, ocho y veinte caras triangulares respectivamente. El cubo y el dodecaedro tienen seis y doce caras pentagonales.

Tabla 1.1. Propiedades de los poliedros regulares

	Área	Volumen
Tetraedro	$1.7321 d^2$	$0.1178 d^3$
Octaedro	$3.4641 d^2$	$0.4714 d^3$
Icosaedro	$8.6603 d^2$	$2.1817 d^3$
Cubo	$6.0000 d^2$	$1.0000 d^3$
Dodecaedro	$20.6458 d^2$	$7.6632 d^3$

La tabla muestra que el área es igual a un determinado factor que multiplica a  $d^2$ , en tanto que el volumen viene dado por otro factor que multiplica a  $d^3$ . Estos coeficientes que preceden a los términos  $d^2$  y  $d^3$  difieren para cada uno de los cinco cuerpos. Dichos coeficientes variarían asimismo si la curvatura del espacio fuera distinta, pero como regla general, válida para todos los espacios de curvatura constante, podemos afirmar que la superficie es proporcional a  $d^2$ , es decir, al cuadrado de la dimensión lineal, mientras que el volumen lo es a  $d^3$ , o sea, al cubo de la dimensión lineal.

Estas reglas nos dan una medida de la forma en que el espacio se extiende, y describen también la expansión hacia fuera de todo lo que se distribuye en dicho espacio. Consideremos, por ejemplo, la propagación de la energía.

El flujo de energía a través de la unidad de área disminuye con el cuadrado de la distancia existente a la fuente de la que procede la energía. Así, la luz se hace más tenue, el sonido más suave y los campos gravitatorio, magnético y eléctrico más débiles según alejamos de la fuente los aparatos de medición correspondientes, ya se



trate de balanzas, magnetómetros, potenciómetros o de órganos sensoriales propios como la vista o el oído. La medida de la propagación de la energía resulta similar al proceso de medición de la superficie de un balón que se expande. Cuando medimos cerca de la fuente emisora, registramos un halo compacto de energía equiparable a la superficie constreñida de un pequeño balón: la densidad de energía es elevada, y la señal recibida, fuerte y clara. Cuando la medición se efectúa lejos de la fuente, se registra un halo en expansión semejante a la superficie expandida de un balón inflado. La energía se propaga de un punto a otro y se disipa. La misma cantidad de energía, o superficie elástica, rodea la fuente en las distintas distancias o frentes en que se verifican los registros, pero la densidad de energía, o superficie, disminuye al incrementarse la distancia.

Dicho de forma más clara, la ley del inverso del cuadrado, o la afirmación de que la energía decrece (varía inversamente) con el cuadrado de la distancia a la fuente emisora, no supone tanto una descripción de la propia energía cuanto del medio en el que ésta se propaga. La aparición del término  $d^2$  en las fórmulas relativas a la propagación de la luz, el sonido y los campos gravitatorio y electromagnético es sinónimo de la aparición de  $d^2$  en nuestra tabla. Se trata de un término de superficie que describe el tamaño del área esférica que rodea una fuente energética.

De la misma manera que gran número de fenómenos varían en relación con la superficie, con  $d^2$ , otros muchos lo hacen de forma proporcional al volumen,  $d^3$ . Entre las propiedades ligadas al volumen, la principal es el peso. Los cuerpos pequeños suelen ser ligeros, y los grandes, pesados. Una mosca es tan ligera que puede adherirse al techo, como si se tratara de una mota de polvo. La habilidad de la mosca no se debe tanto a una función de las ventosas adhesivas de los extremos de sus patas como a su reducido tamaño. De hecho también el hombre podría pasearse cabeza abajo por el techo si fuera lo suficientemente pequeño para ello. Y el vuelo no plantearía tampoco ningún problema: con el tamaño de una mosca, la preocupación del hombre estribaría más bien en permanecer en el suelo. Como J. B. S. Haldane ha observado, el peso, o la fuerza de gravedad, no representa problema alguno para un animal incluso del tamaño de un ratón:

Si se deja caer un ratón en el interior de un pozo minero de más de novecientos metros de profundidad, cuando aquél llega al fondo sufre apenas una ligera contusión y escapa. Una rata probablemente moriría en la caída, aunque saldría ilesa tras caer de un undécimo piso: un hombre perecería sin duda alguna, y un caballo resultaría aplastado por el impacto.

En el caso de una ballena varada, la muerte sobrevendría por asfixia debido a la acción de su propio peso corporal sobre los pulmones al encallar en aguas bajas.

De nuestra tabla de superficies y volúmenes inferimos que, cuando un cuerpo incrementa su tamaño, su superficie y su volumen aumentan en proporciones muy distintas, la primera según el cuadrado de  $d$  y el segundo según el cubo de  $d$ . La siguiente tabla muestra el significado que tiene tal diferencia.

Tabla 1.2. Variación del volumen con respecto a la superficie

Dimensión lineal $d$	Superficie $\propto d^2$	Volumen $\propto d^3$
1	1	1
2	4	8
4	16	64
8	64	512
16	256	4.096
32	1.024	32.768

Un cuerpo cuyas dimensiones lineales son 32 veces las de otro tiene una superficie 1.024 veces mayor que la de este último y un volumen 32.768 veces superior. Un cuerpo de gran tamaño posee, por tanto, más volumen en relación a su superficie que otro pequeño. En los seres vivos, un organismo de gran envergadura pesa más y, como hemos visto, genera más calor que uno pequeño: tales funciones están relacionadas con el volumen o masa de sus tejidos. Por otra parte, dicho organismo es también más débil y encuentra una mayor dificultad para disipar el calor producido por su metabolismo, así como para asimilar el alimento o captar el oxígeno que precisa: estas funciones dependen de su superficie corporal.





Fig. 10

Si el organismo mayor tuviera que funcionar como el más pequeño, debería compensar su elevado volumen incrementando selectivamente sus superficies críticas, para lo cual existen varias soluciones, todas ellas relacionadas con el desarrollo de estructuras más o menos complejas: aplanamiento de membranas y capas superficiales, formación de elementos filiformes, ramificaciones, repliegues, alargamiento de las zonas de intercambio y creación de órganos huecos y cavidades. Ejemplos de cada una de estas alternativas podemos hallarlos constantemente a nuestro alrededor.

En la figura 10 un brote joven extiende sus hojas laminares buscando la luz del sol. Mientras prosigue su crecimiento, el tallo se ramificará y emitirá nuevas hojas para, finalmente, engrosar y desarrollar ramas más fuertes y resistentes que, a su vez, darán lugar a otras estructuras. La proliferación de ramas y hojas permitirá a la planta

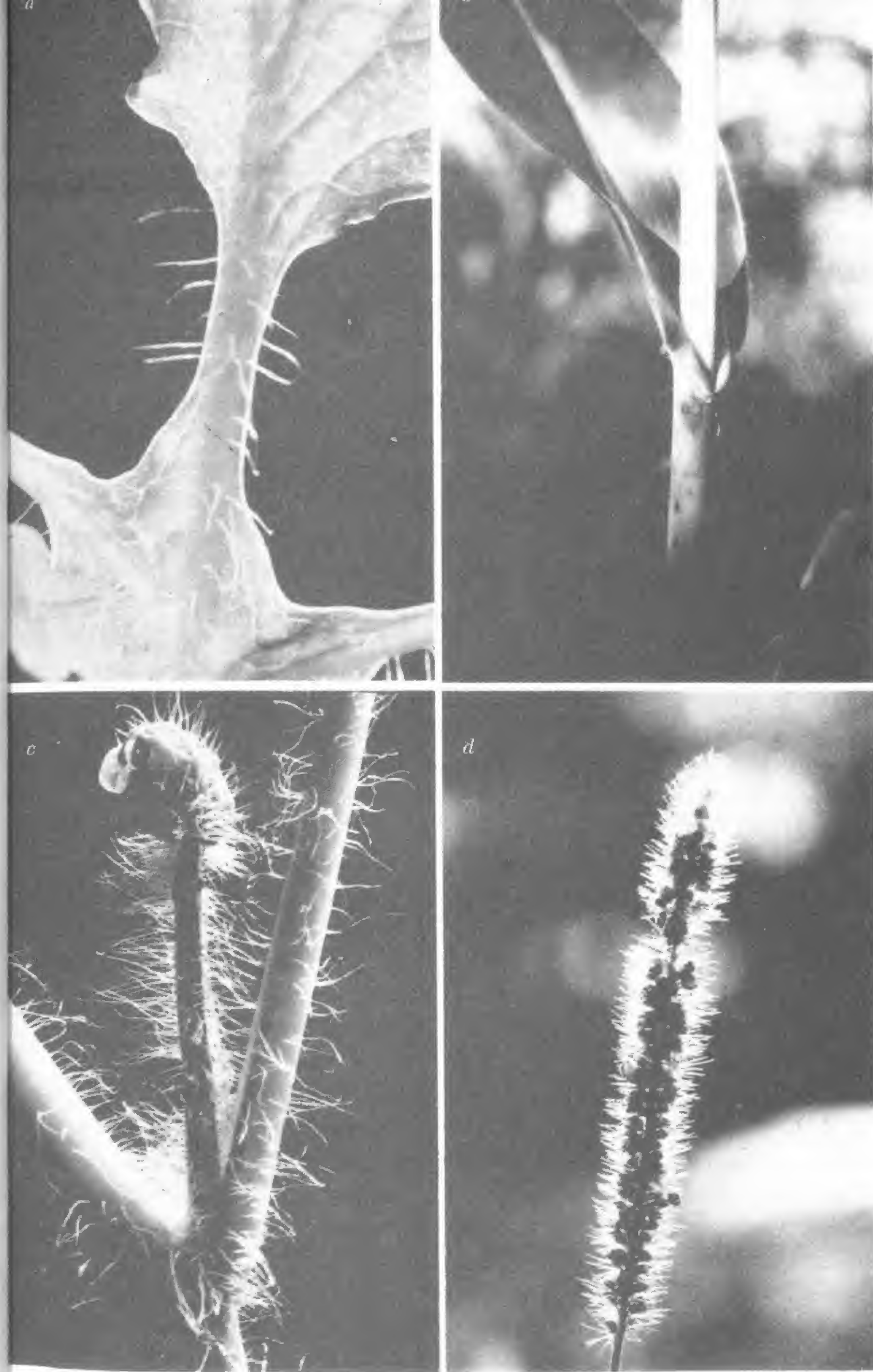


Fig. 11 ►



grande realizar sus propias funciones de forma similar a como las realiza la plántula.

En la figura 11 el tallo de una celidonia se extiende para constituir tejidos y hojas (a) y la vaina que rodea a la caña del maíz se dobla hacia fuera aplanándose (b). Vemos que tanto la celidonia (c) como una herbácea cualquiera (d) desarrollan pilosidades que, al igual que las espinas, los cilios, las antenas y otros muchos apéndices filiformes y puntiagudos de los seres vivos, permiten mantener el equilibrio de la relación superficie/volumen.

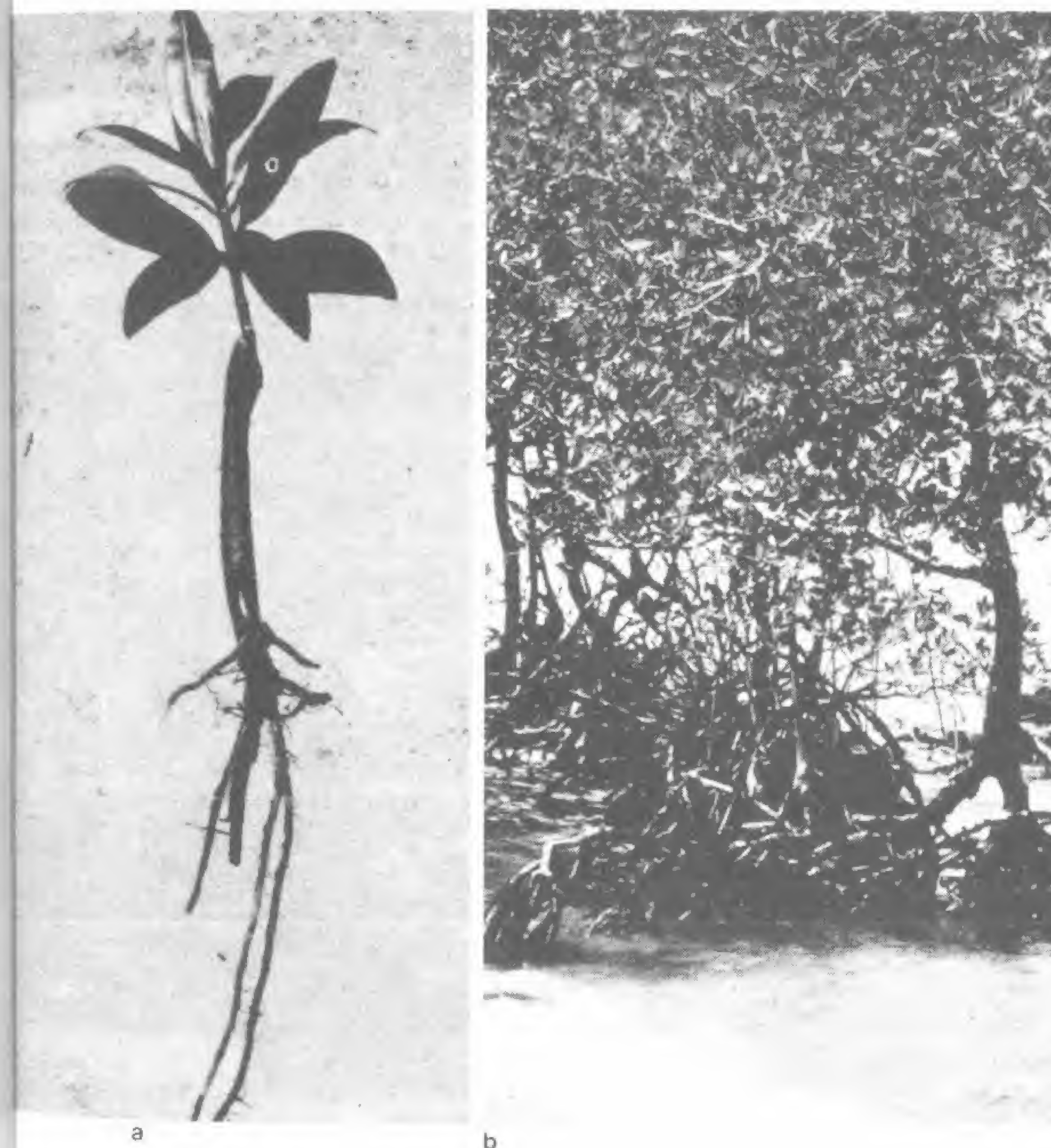
Los entramados de ramas y raíces incrementan la superficie con eficacia aún mayor. Según Howard J. Dittmer, de la Universidad de Iowa, en sólo cuatro meses una planta de centeno desarrolla más de seiscientos kilómetros de raíces. Incluyendo las zonas pilíferas, la longitud se eleva a ¡más de 11.200 km! Además, las plantas grandes se ramifican proporcionalmente más que las pequeñas. La figura 12 muestra el brote de una vaina de mangle rojo con unas pocas hojas y un tallo sin ramificar, en comparación con un matorral de árboles ya adultos. Para mantener la superficie proporcional al volumen, que experimenta en el curso del crecimiento un incremento notable, los grandes árboles desarrollan una ramificación abundante y un elevado número de hojas. Las ramas permiten al árbol adulto realizar las funciones vitales de manera similar a como el escaso número de hojas hace posible la vida del joven brote. La ramificación es una consecuencia del aumento de tamaño.

En la figura 13 se representa el incremento de la superficie producido gracias a la ramificación: vasos sanguíneos y vías respiratorias del pulmón humano en un modelo construido en látex (a); detalle de un manglar (b); parte del sistema arterial del perro, también en látex (c), y floración de un fustete (*Cotinus coggygria*) en (d).

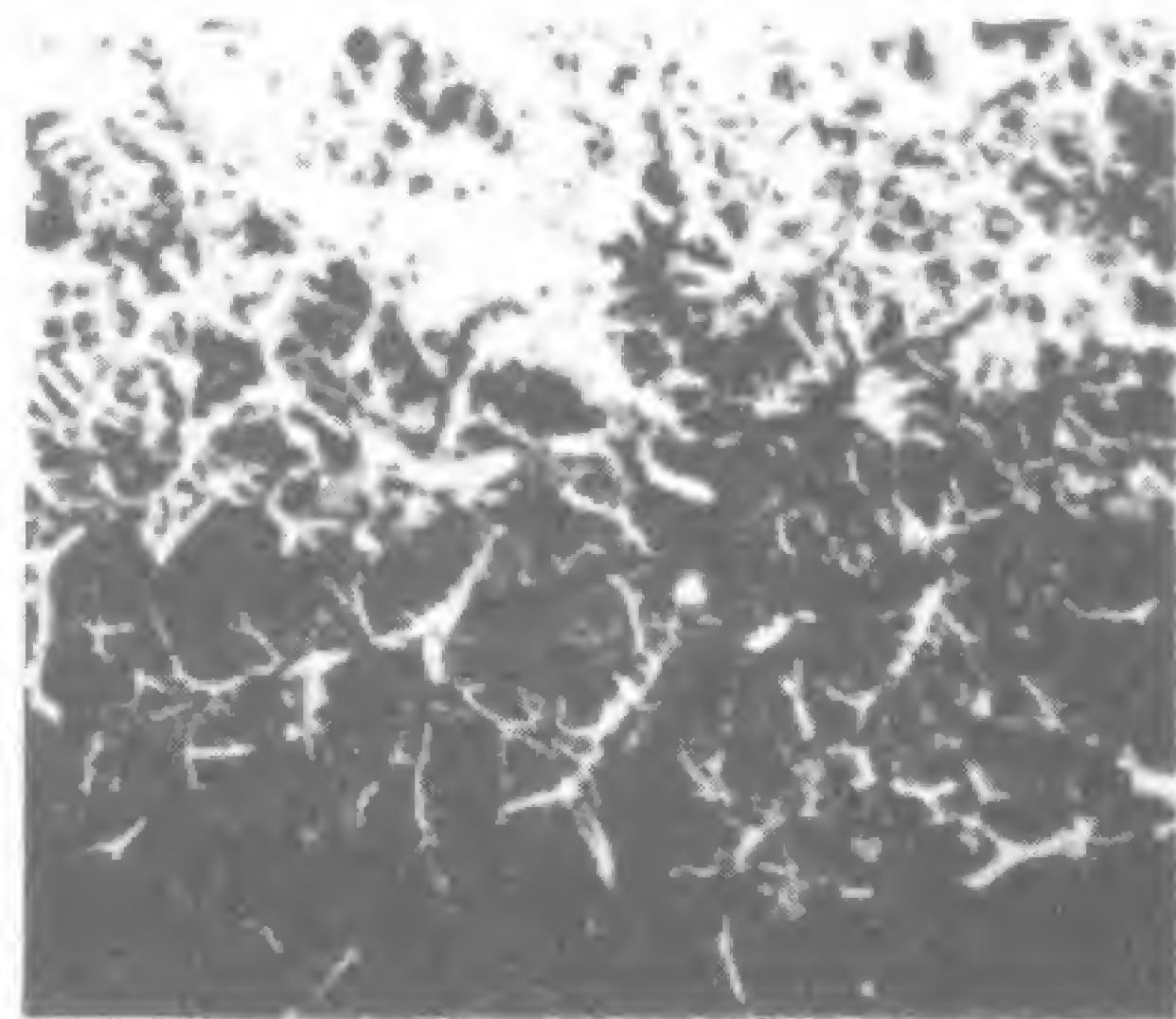
Los procesos de ramificación de los sistemas circulatorios en el hombre y en el perro son especialmente interesantes en cuanto suponen intentos notables para incrementar la superficie. Un diminuto organismo unicelular no tiene necesidad de semejantes complicaciones: no requiere pulmones ni corazón ni sistema circulatorio alguno, ya que puede absorber directamente el oxígeno y el alimento a través de su membrana citoplásmica, que suele ser en dichos organismos mayor que la que presentan las células hísticas de los seres pluricelu-

lares. Cuando el organismo unicelular o cualquier otro tipo de células crecen y las funciones que dependen de la superficie no pueden ya mantener al protoplasma o al tejido de que se trate, no se constituyen repliegues, venas o ramificaciones; la célula simplemente se divide. Se forman así dos o más elementos celulares de menor tamaño que la célula madre original y con una superficie comparativamente mayor. Por tanto, no nos causa extrañeza saber que las células existen

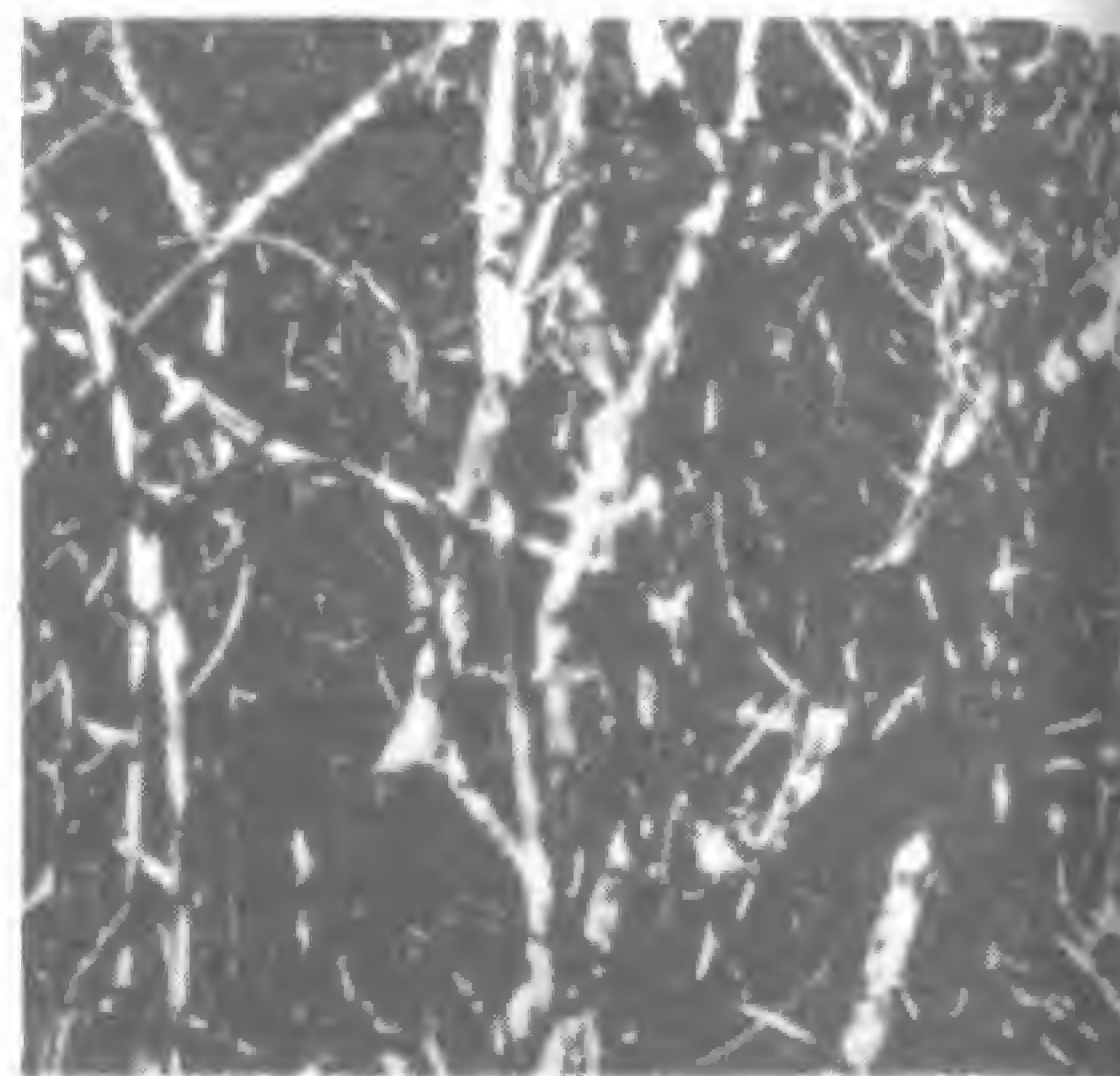
Fig. 12



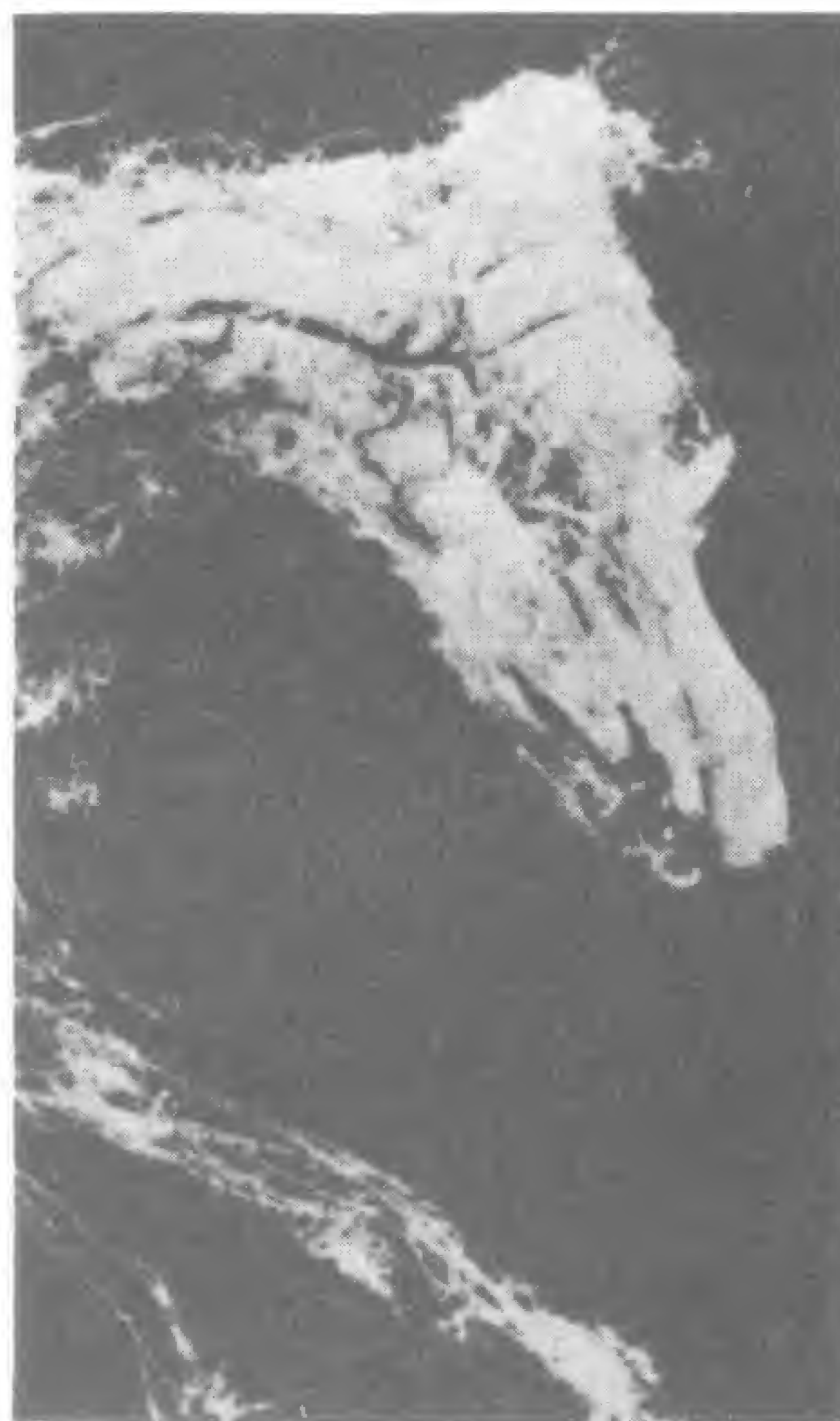




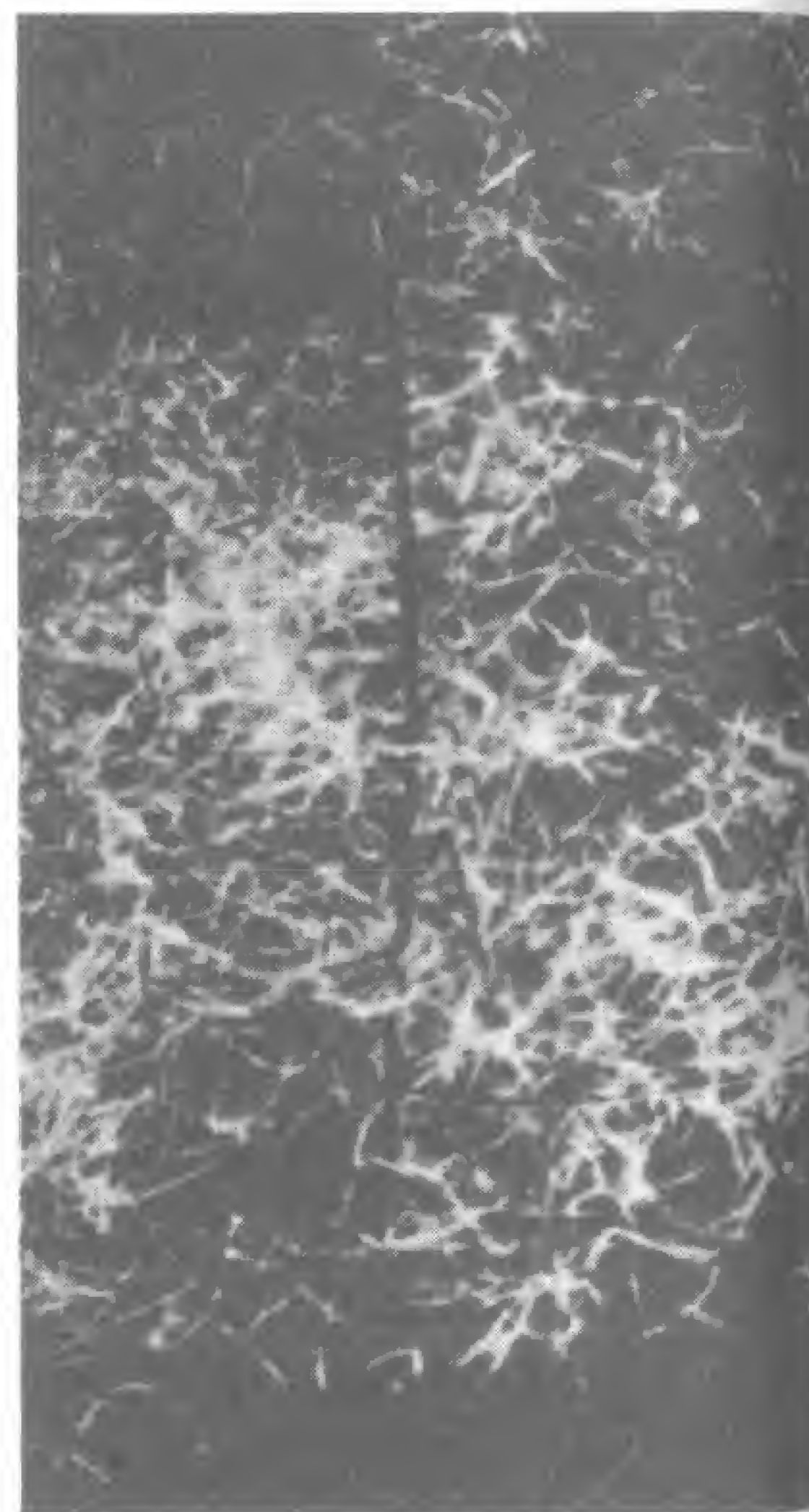
a



b



c



d

Fig. 13

dentro de una gama limitada de tamaños, los cuales no pueden ser ni excesivamente pequeños ni demasiado grandes. De otra manera, las funciones dependientes de la superficie no podrían equipararse con las que están ligadas al volumen.

Una acertada analogía de la división celular se representa en la figura 14, en la que un pequeño hilo de agua ha sido ralentizado con



Fig. 14



objeto de revelar las gotas que lo constituyen. Debido a la tensión superficial de la gota, ésta puede encerrar una cantidad de líquido nada despreciable en relación con su tamaño. Si el volumen de la gota se hace demasiado elevado, la tensión superficial resulta vencida y la gota se desprende. El volumen ha de ser por tanto proporcional a la tensión, y por ello también en este caso, como ocurría con las células, encontramos que existe un límite superior de tamaño que hace que no puedan existir gotas tan grandes como una pelota de béisbol o como una sandía.

La enseñanza fundamental que se desprende de lo anterior es que el tamaño de los cuerpos se halla restringido: cuerpos distintos están confinados a posibilidades dimensionales diferentes. Los nucleones se unen entre sí para constituir núcleos de tamaño relativamente fijo; los electrones se ligan a los núcleos para formar átomos de magnitudes bien definidas; los átomos se enlazan para dar lugar a moléculas, y éstas a células, las cuales a su vez integran los organismos. No es posible hallar un núcleo, un átomo, una molécula o una célula tan grande como un hombre. Cada forma tiene su propio campo de dimensiones y se encuentra limitada tanto superior como inferiormente. Ahora bien, las distintas formas se asocian y actúan conjuntamente con otras de sus mismas características a fin de originar estructuras mayores y niveles superiores de organización.

Incluso dentro de un determinado tipo de forma, las propiedades varían con el tamaño y lo hacen, al menos en el reino animal, de una manera uniforme y predecible. Los animales pequeños respiran más rápidamente que los grandes, sus corazones laten a una mayor velocidad, los sonidos que emiten son más agudos y sus alas o miembros se mueven con más celeridad. El consumo de alimento es más elevado en los animales de pequeño tamaño en proporción con su peso corporal, su tasa de reproducción es más alta y su longevidad menor.

Como D'Arcy Thompson señaló, la razón de estas divergencias estriba en que una fibra muscular más corta, ya sea cardíaca, pulmonar, alar o perteneciente a las cuerdas vocales, se contrae con mayor rapidez que otra más grande, de la misma forma que una cuerda fina y corta, cuando se hace vibrar, muestra una vibración más rápida que otra gruesa y larga. El principio se confirma cuando tabulamos los latidos cardíacos de distintos animales:

Tabla 1.3. Latidos cardíacos

Musaraña menuda	700 minuto
Gato doméstico	120 minuto
Hombre	72 minuto
Elefante	35-40 minuto
Ballena	15-20 minuto

Puesto que la respiración va asociada con el ritmo cardíaco (por lo general tiene lugar una respiración por cada cuatro latidos cardíacos), la tasa respiratoria decrece también cuando el tamaño aumenta. Y lo mismo ocurre con la velocidad de batido de las alas y el movimiento de los miembros.

Tabla 1.4. Batido de las alas

Mosca	1.046/segundo
Mosquito	587/segundo
Abeja	230/segundo
Colibrí	100/segundo
Gorrión	15. segundo
Cigüeña	2-3. segundo
Cóndor	0. segundo

Aparentemente, los organismos pequeños viven según una escala de tiempo más corta que los grandes, y su vida parece pasar con mayor rapidez. Con unos veinticinco millones de latidos cardíacos a lo largo de toda su vida (según una estimación empírica), la rata vive sólo tres años; el conejo, siete; el hombre, setenta, y el elefante y la ballena, incluso más. Del mismo modo, los organismos pequeños se reproducen con una periodicidad más frecuente que los grandes: llega a ser de apenas veinte minutos en algunas bacterias.

Tanto unos como otros tienen sus ventajas. Los pequeños precisan menos alimento, en términos absolutos, que los grandes, sus estructuras son menos complejas y resulta más difícil acabar con ellos. Debido a su elevada tasa reproductiva, producen una mayor descendencia y sus poblaciones tienen más probabilidades de remontar la aparición de condiciones ambientales adversas. Una termita reina,



por ejemplo, pone unos 80.000 huevos por día y, en el período de tiempo que tarda un embrión humano en desarrollarse, una mariposa nocturna puede originar cerca de 400 billones de descendientes.

En el otro platillo de la balanza, el animal grande es favorecido en cuanto que sus pérdidas de calor son menores, al ser su superficie más reducida, en términos comparativos. Por esta razón, puede sobrevivir con más facilidad en climas fríos. En relación con su propio peso corporal, el animal grande consume menos alimento. Un hombre, por ejemplo, ingiere  $1/50$  de su peso en tres comidas diarias, mientras que la musaraña enana, de menos de 6 g, come continuamente y consume en un día una cantidad de alimento igual a varias veces su peso. Muchos animales de gran talla son poderosos depredadores, y entre ellos se incluye el hombre, cuya envergadura es lo suficientemente grande como para permitirle manejar un palo a modo de arma con suma efectividad. Pero ni siquiera un hombre es tan grande como para fracturarse irreversiblemente los huesos en una caída. Los organismos grandes tienen mayor número de células y mayores posibilidades de desarrollar un cerebro, así como de disfrutar de una vida más larga en el curso de la cual hacer uso de dicho órgano. El hombre, con su notable masa cerebral, aprendió a utilizar el fuego, pero, consideraciones aparte respecto a las enormes posibilidades que el cerebro confiere al ser humano, y como F. W. Went ha señalado, sólo una criatura del tamaño del hombre podía llegar a controlar de una forma efectiva el fuego. Una pequeña hoguera supone la menor cantidad de fuego que puede utilizarse para la obtención de ciertos resultados de manera segura y controlable. Un fuego más reducido se extingue con mucha facilidad y uno mayor tiene más posibilidades de escapar a nuestro control. Prometeo, al robar el fuego a los dioses, obtuvo precisamente la cantidad ideal, suficiente para alimentar las llamas y para mantenerlo encendido.

De forma similar, observa Went, el hombre alcanzó el grado de inteligencia necesario para desarrollar el lenguaje, pero antes, para poder emitir el sonido que es vehículo de dicho lenguaje, fue condición imprescindible que tuviera una envergadura lo suficientemente grande como para requerir pulmones y poder expulsar el aire de los mismos con la fuerza precisa para producir la vibración de las cuerdas vocales.

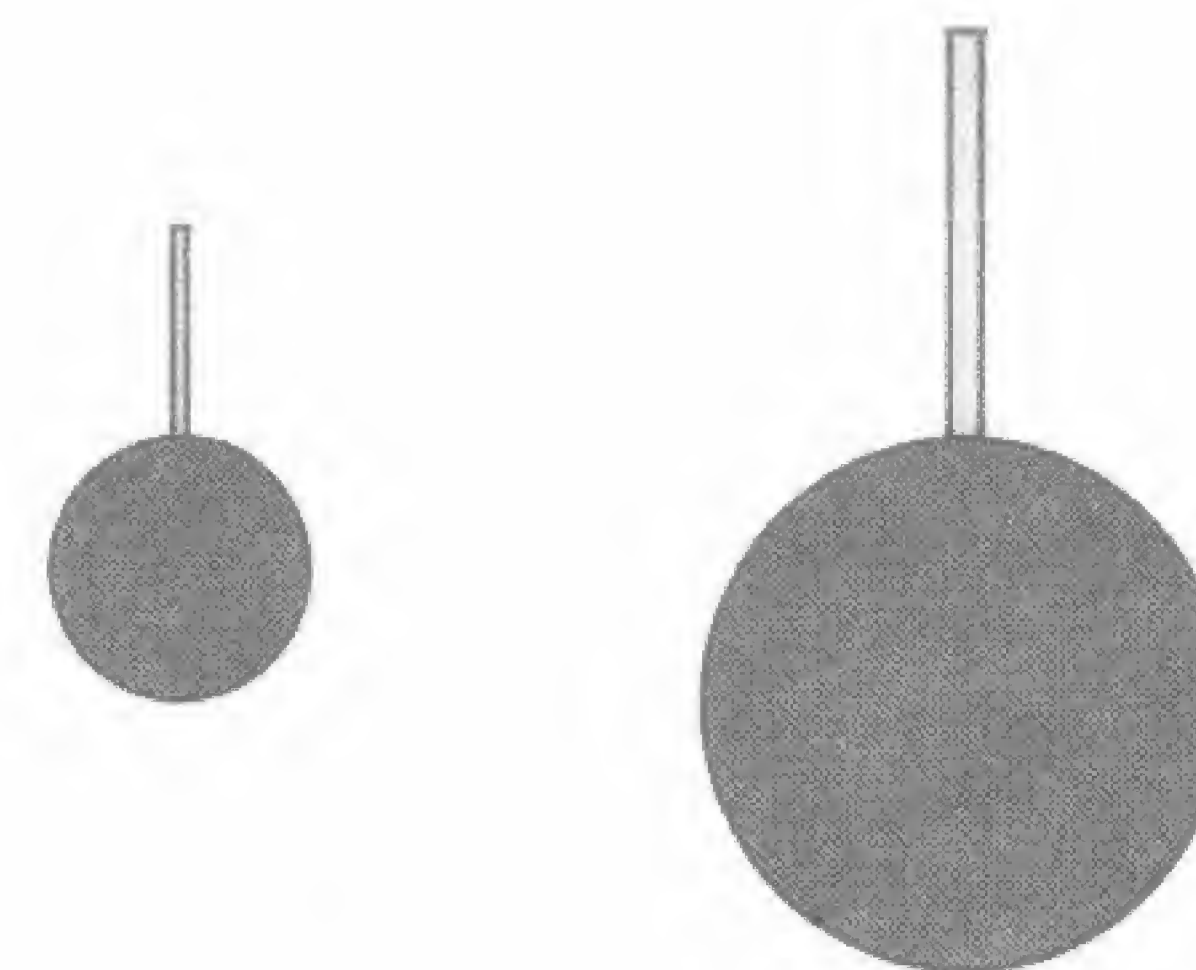


Fig. 15

En este análisis de los efectos del tamaño, hemos mencionado la idea de Galileo de que la mayor de dos formas similares dadas es la más débil. Concluyamos el capítulo, pues, examinando más atentamente la afirmación de Galileo.

Imaginemos, como muestra la figura 15, dos manzanas suspendidas, una de doble diámetro que la otra. Sabemos que tanto el volumen como el peso de la manzana más grande son  $2^3 = 8$  veces los de la pequeña. Si suponemos asimismo que el pedúnculo que une a la primera al árbol tiene también un diámetro doble que el de la segunda, encontramos que la resistencia de dicho pedúnculo, dada por el área de su sección transversal, es  $2^2 = 4$  veces la del menor. Por tanto, el peso de la manzana, la carga que el pedúnculo debe soportar, es ocho veces mayor para la manzana grande que para la pequeña, en tanto que la resistencia del pedúnculo es sólo cuatro veces superior: en algún momento, mientras la manzana continúa creciendo, se producirá su caída al suelo.

Por consiguiente, no nos sorprende el hecho de que en un principio las flores del manzano se mantengan erguidas en la rama y que, a medida que los frutos se desarrollan, vayan inclinándose hacia abajo (fig. 16) y acaben por caer al suelo. También observamos que los frutos grandes, como melones y calabazas, no penden de sus tallos, sino que surgen a nivel del terreno.

Ahora podemos invertir los supuestos de nuestro diagrama de las manzanas e imaginar éstas situadas sobre pequeñas bases. Nuestro



análisis de la resistencia de dichas bases es en esencia idéntico al que efectuamos para los pedúnculos que unían los frutos al árbol, excepto en el hecho de que las bases se hallan comprimidas y no sometidas a una tensión, como ocurría en el caso anterior. En ambos supuestos, el área transversal de los soportes se multiplica por un factor de 4, y la carga que deben aguantar, por un factor de 8.

A partir de las consideraciones efectuadas sobre la forma en que las bases se hacen relativamente más débiles a medida que ellas y los cuerpos que soportan incrementan su tamaño, vemos por qué el tronco de un árbol adulto es proporcionalmente más grueso que

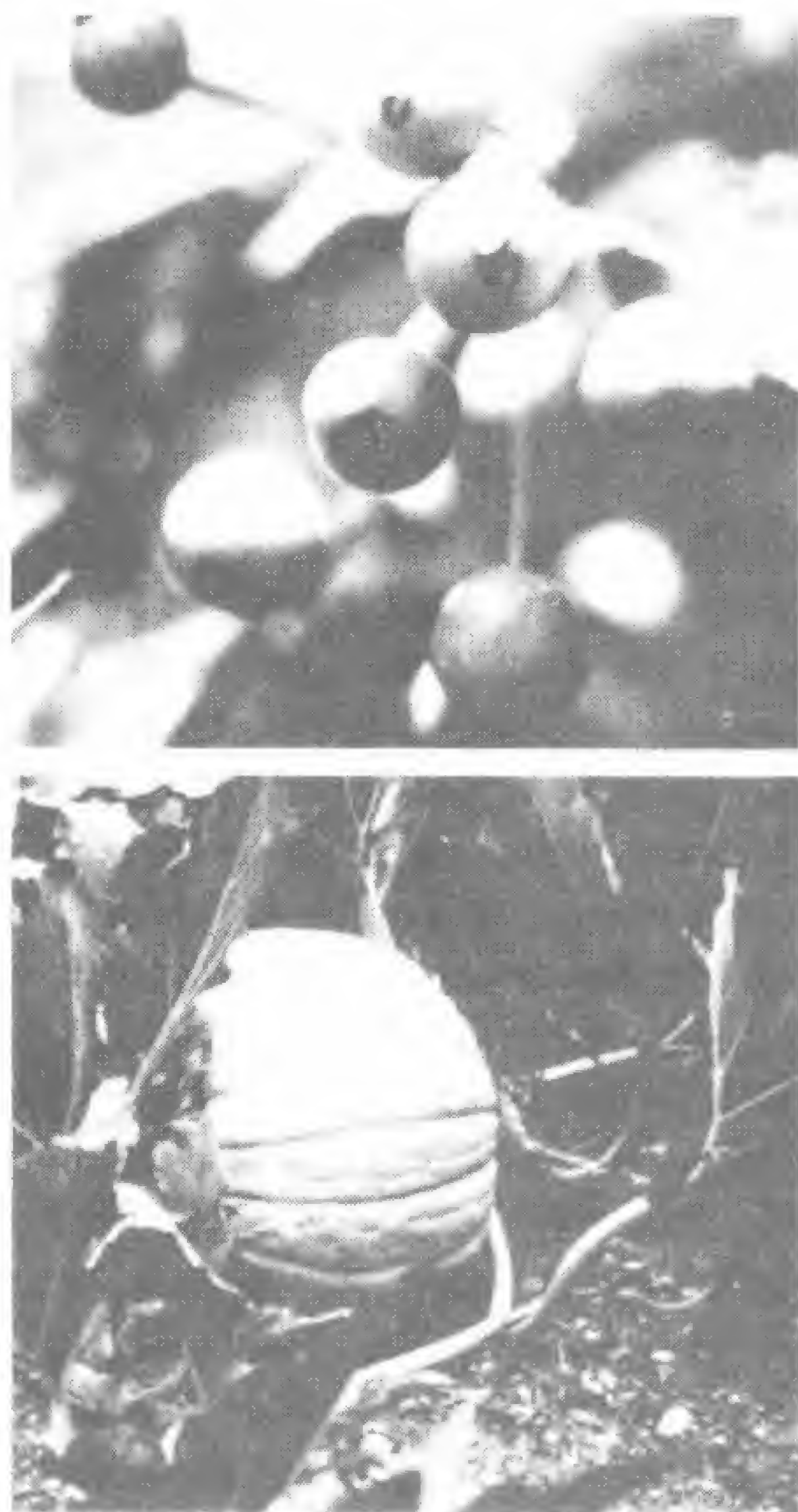


Fig. 16



Fig. 17

el de un tierno arbolito o las patas de un elefante son más macizas y recias que las de una mariposa (fig. 17). Estamos seguros, a pesar de los relatos de Gulliver, que los gigantes no han hollado jamás la tierra. Los brobdingnagianos de sesenta pies de estatura descritos por Gulliver habrían pesado noventa toneladas, lo que ninguna estructu-



ra esquelética es capaz de soportar. Incluso en el caso del acero y del hormigón, cuya resistencia es mayor que la del tejido óseo, observamos que el grosor del Empire State Building no es menor, en proporción a su tamaño, que el de un tallo de trigo (si así fuera, la anchura de su base sería sólo de 1,80 m), hecho observado también con acierto por F. W. Went.

Otro motivo por el que una pequeña base o estructura puede romperse es por combamiento o por pandeo, originándose una deformación y cediendo en los laterales. Al analizar el combamiento de la barra que aparece en la figura 18 observamos que la misma es

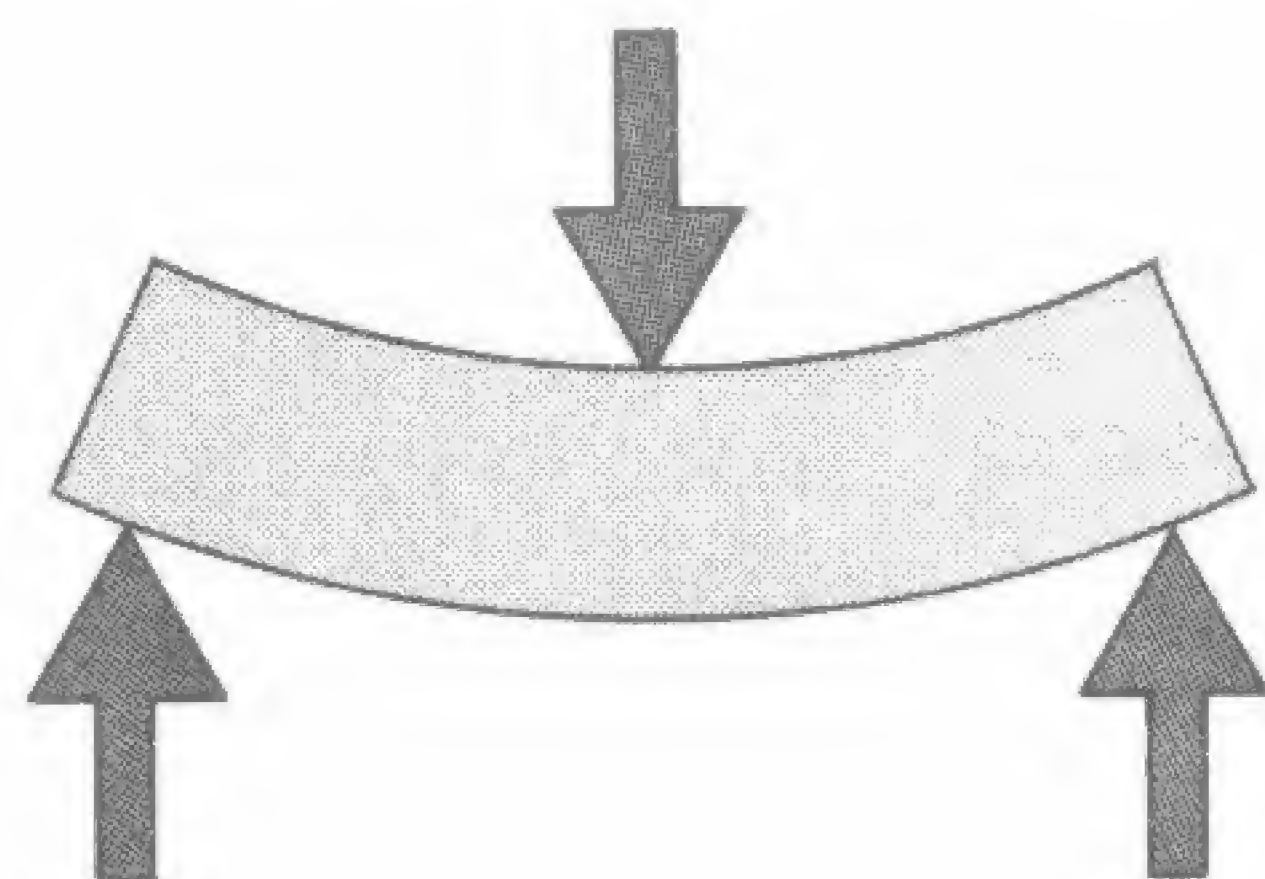


Fig. 18

comprimida en su centro y empujada hacia arriba en sus extremos, de forma que la parte inferior se alarga y presenta una tensión, en tanto que la superior se acorta y manifiesta una compresión. De todo ello, podríamos deducir que el combamiento es el resultado de la acción combinada de fuerzas de tensión y de compresión y que, a medida que aumenta el tamaño de la barra, su resistencia al combamiento se incrementa en menor medida que las fuerzas aplicadas. Éste es, en efecto, el proceso, y para ser más precisos, una barra cuyas dimensiones son el doble que las de otra, tiene sólo  $2^3 = 8$  veces el módulo de sección o de resistencia para superar una fuerza  $2^4 = 16$  veces superior, fuerza introducida por su propio peso. Así, cualquier barra o viga se romperá bajo la acción de su peso si su tamaño aumenta excesivamente. De esta forma, con respecto a la fuerza de tensión, compresión y combamiento, Galileo estaba en lo

cierto: dados dos cuerpos de una forma y un material determinados, el mayor es indefectiblemente el más débil.

La observación de Galileo no ha pasado inadvertida a los ingenieros actuales. Por ello, cuando se estudia el comportamiento de un modelo a escala para simular en él el comportamiento real de una estructura de mayor tamaño, la consideración más importante estriba en que el grado de vulnerabilidad del mismo o, lo que es igual, que la intensidad de las presiones ejercidas sobre él, sean las necesarias como para compensar la mayor resistencia que el modelo a escala tiene con respecto a la estructura real. Por esta razón, el ingeniero aumenta con sacos de arena la carga de los elementos estructurales en el modelo a escala de la suspensión de un puente, a fin de simular el peso comparado de dichos elementos cuando el tamaño de los mismos se incrementa. De forma similar, se utilizan bolsas de mercurio (cuyo peso es casi catorce veces el del agua) en lugar de agua en el estudio de la presión ejercida contra las paredes de un dique a escala, con objeto de representar de manera más exacta la presión que la masa de agua ejercerá sobre un dique real.

Las dos estrategias utilizadas tanto por la Naturaleza como por el hombre para contrarrestar los efectos de un aumento de tamaño consisten bien en emplear un material más resistente en sus construcciones o en crear estructuras huecas y reducir así su peso. Cambiar de material supone actuar sólo sobre uno de los aspectos del problema: cualquier material que se use cederá bajo la acción de su propio peso. Una cadena colgante de cristal de sílice puro o de acero, por ejemplo, puede ser más larga que otra de aluminio, y mayor longitud aún puede tener una de boro (más de 300 km), pero cada material tiene un límite superior de tamaño y cuando alcanza determinadas magnitudes se vuelve incapaz de soportar su propio peso.

El otro medio de contrarrestar los efectos de la escala consiste en ordenar el material de acuerdo con una configuración más efectiva, retirándolo de los puntos en los que no es necesario y añadiéndolo en mayor cantidad en aquellos otros en que se requiera. Ésta es quizá la estrategia más frecuente: la estrategia del diseño. En la figura 19 podemos apreciar que, con una cavidad interior, un exterior intacto y una sencilla triangulación de los nervios o tabiques que ordenan el espacio interno, un pimiento (a) y una vaina de legumbre (b)



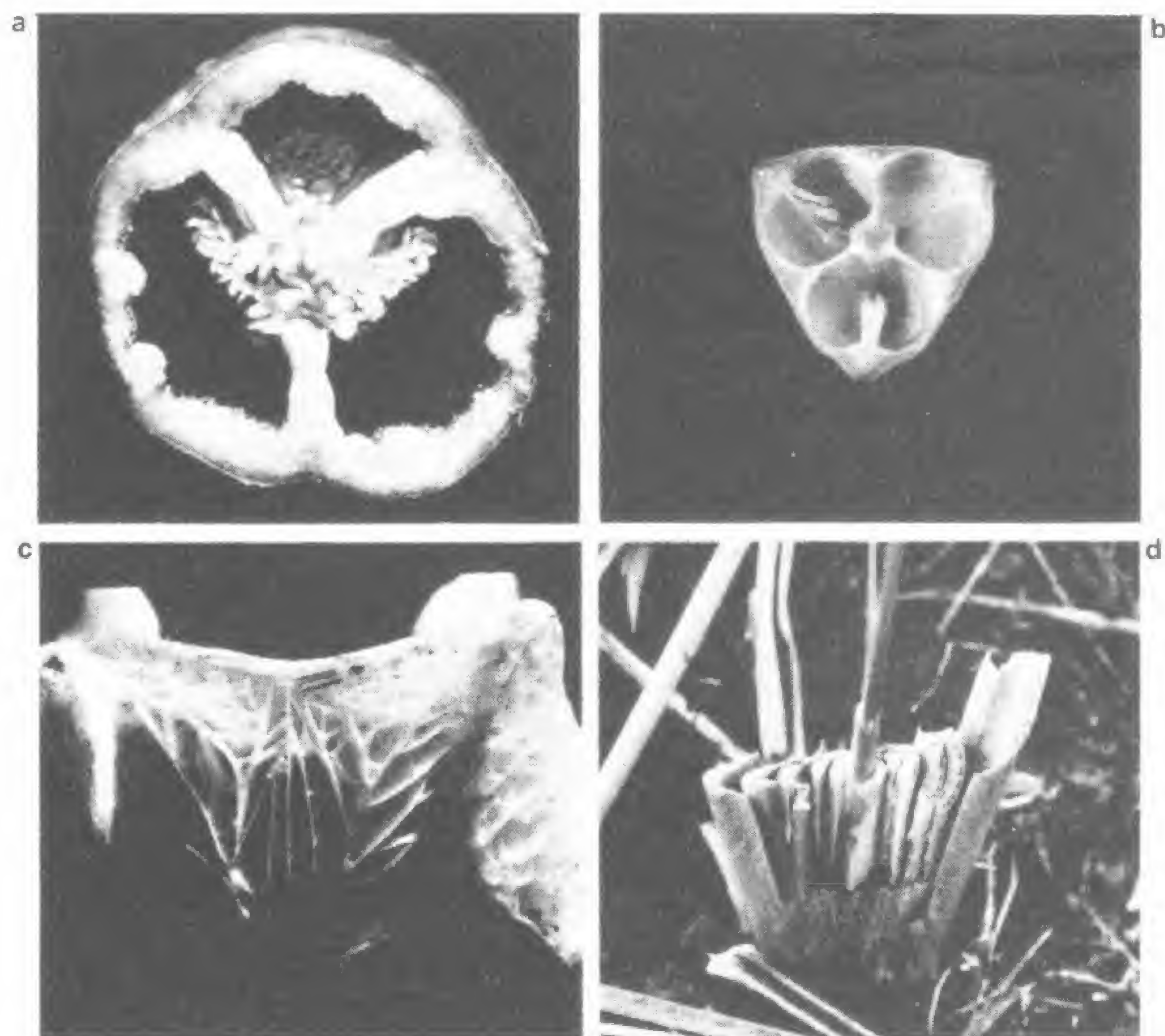
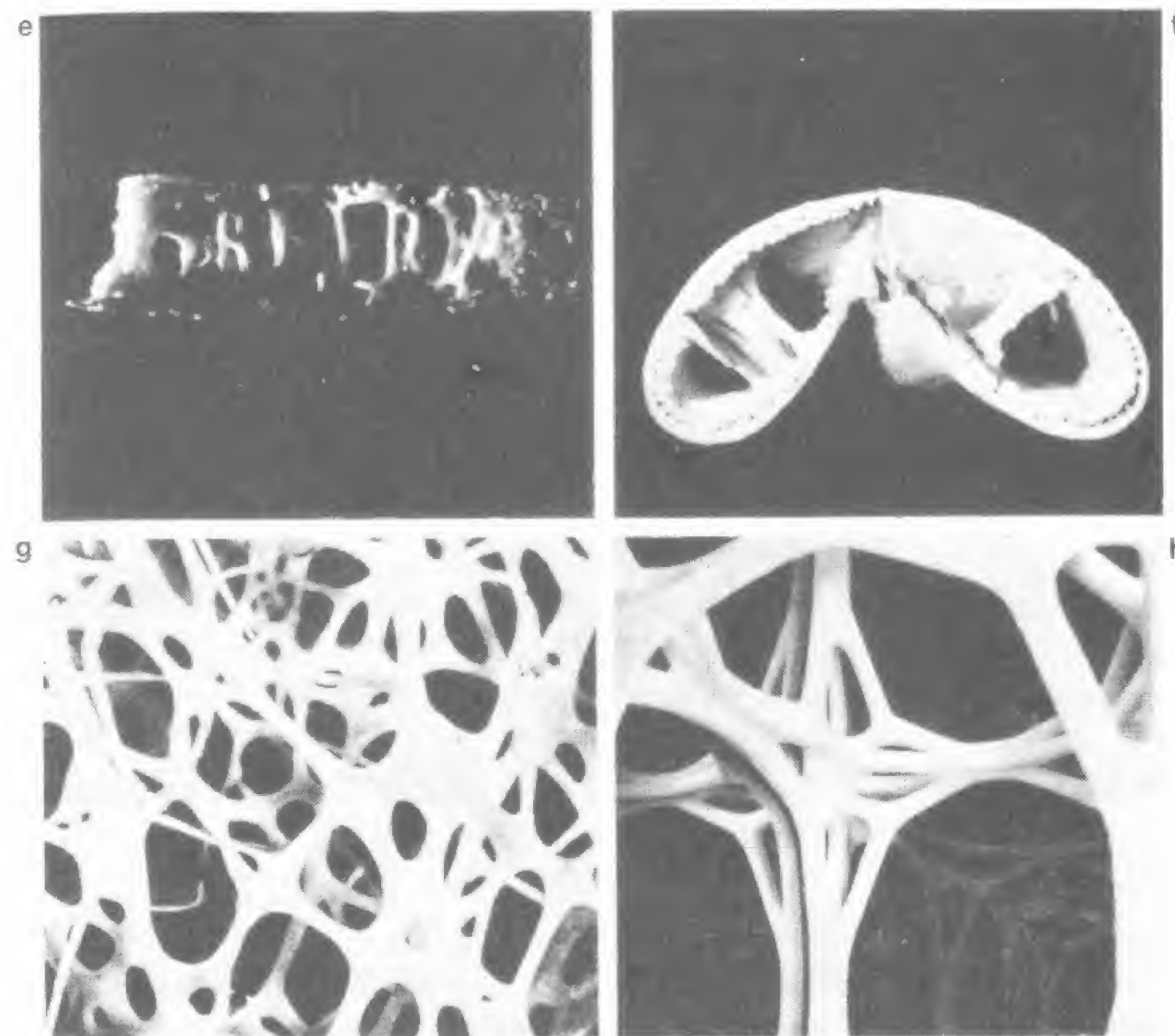


Fig. 19

tienen un peso menor que si fueran sólidos, pero poseen una resistencia equivalente. Las vértebras de un pez y la región medular ondulada de un tallo de hierba (c y d) muestran también un grado elevado de oquedad, ligereza y resistencia merced a la disposición adecuada de una serie de nervaduras. Entre las regiones dorsal y ventral del caparazón de un cangrejo bayoneta y de la corteza de un sequete (e y f), el reforzamiento es irregular, como si estuviera constituido por la solidificación de un fluido viscoso. La figura 19g muestra un corte aumentado de tejido óseo de la tibia humana, fotografiado por Carl Struve, mientras que en la figura 19h puede verse un estudio estructural realizado por Frei Otto en colaboración con Koch y Minke. Ambas ilustraciones suponen variaciones de un mismo tema: la reduc-



ción en la masa con el fin de incrementar la resistencia de una estructura.

Los antiguos romanos utilizaron también la estrategia del diseño al emplear agregados ligeros de piedra pómez y cavidades huecas en el hormigón con el que edificaron la cúpula del Panteón. El uso de artesonados en el interior de dicha cúpula contribuyó a reducir aún más el peso de la estructura. La utilización moderna de nervaduras en las edificaciones, así como de secciones en forma de arca, armazones y bastidores, vigas en forma de T, planchas plegadas y entramados, constituyen intentos de reducir el peso o la carga que deben soportar las estructuras de los edificios, al tiempo que se mantiene la cantidad de material suficiente para garantizar su resistencia.



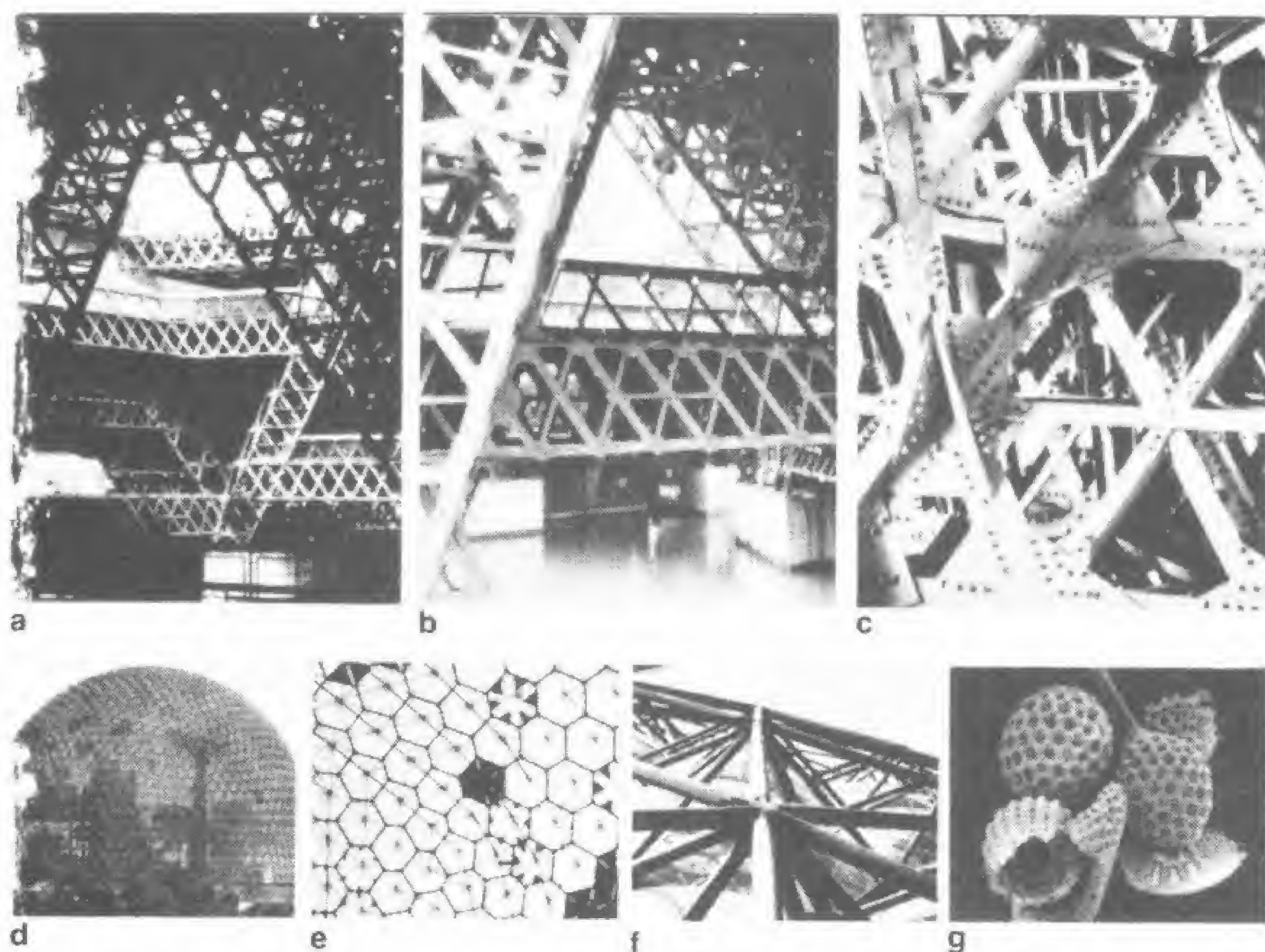


Fig. 20

En la figura 20 pueden apreciarse los pabellones diseñados por Affleck, Desbarats, Dimakopoulos, Lebensold y Sise (las tres fotografías superiores) y el Pabellón de Estados Unidos diseñado por Buckminster Fuller para la Expo 67 de Montreal (fotografías *d*, *e* y *f*). Estas estructuras representan algunos de los más recientes intentos de la arquitectura en la construcción de redes y mallas de acero trianguladas y abiertas, características estrechamente relacionadas con su tamaño. Menor cantidad de material significa menos carga que soportar.

Resulta interesante observar que, al igual que ocurre con cualquier poliedro regular o semirregular que contenga pentágonos, la cúpula de Fuller, si se construye en forma de esfera completa, debe contener doce y sólo doce pentágonos. Uno de ellos puede verse en el centro de la figura 20*e*.

También es significativo el hecho de que la geometría de la cúpula en su conjunto es similar a la estructura que presentan ciertos virus

y radiolarios. La figura 20*g* muestra algunos fragmentos del esqueleto silíceo de los radiolarios observados a unos cien aumentos. Pese a esta similitud, la diferencia en tamaño absoluto entre los radiolarios y la cúpula dicta importantes divergencias en las respectivas estructuras. Dado que los elementos tubulares de que se compone la cúpula soportan en la parte inferior de la misma una carga mayor que en la parte superior, poseen en la primera una pared más gruesa y resistente. Esta diferencia de espesor no se aprecia debido a que los diámetros de todos los tubos son idénticos con el fin de facilitar las uniones entre ellos. Pero tales diferencias existen y, al contrario de lo que ocurre en los radiolarios, cuya simetría es verdaderamente esférica y permite al animal girar, flotar y moverse en las olas sin que importe cuál es la cara dorsal y cuál la ventral y sin estar influido apenas por la gravedad debido a su pequeña masa, la cúpula es esférica sólo en su apariencia externa. No puede ser apoyada sobre su parte superior como un radiolario, sino que debe permanecer siempre en posición vertical, con sus elementos estructurales más débiles situados en la zona superior y los más resistentes en la inferior, cada uno de ellos confeccionado expresamente para soportar una determinada carga.

La diferencia estructural entre los radiolarios y la cúpula es similar a la existencia entre el raquis y los folíolos de la hoja de un cocotero (fig. 21). Aunque tanto el raquis como los folíolos presentan un nervio central que da lugar a una distribución par de filamentos secundarios, los elementos que constituyen el raquis, dado su pequeño tamaño, son relativamente uniformes e indiferenciados, mientras que los de la hoja se hallan plegados y tienen una mayor complejidad a fin de soportar mejor el gran peso de la hoja. El eje central de esta última es triangular y está unido en intersecciones también triangulares a los folíolos plegados, los cuales se encuentran a su vez señalados con nervios centrales.

Un ejemplo final del efecto de la escala en arquitectura es el hecho evidente, pero inadvertido durante mucho tiempo, de que los grandes edificios son más altos y esbeltos en sus proporciones que los pequeños. Así, el Empire State, aunque de mayor grosor, comparativamente hablando, que un junco, es mucho más estrecho que un edificio de oficinas de un solo piso y la torre de apartamentos es ante todo una estructura esbelta y no una forma cúbica como la que



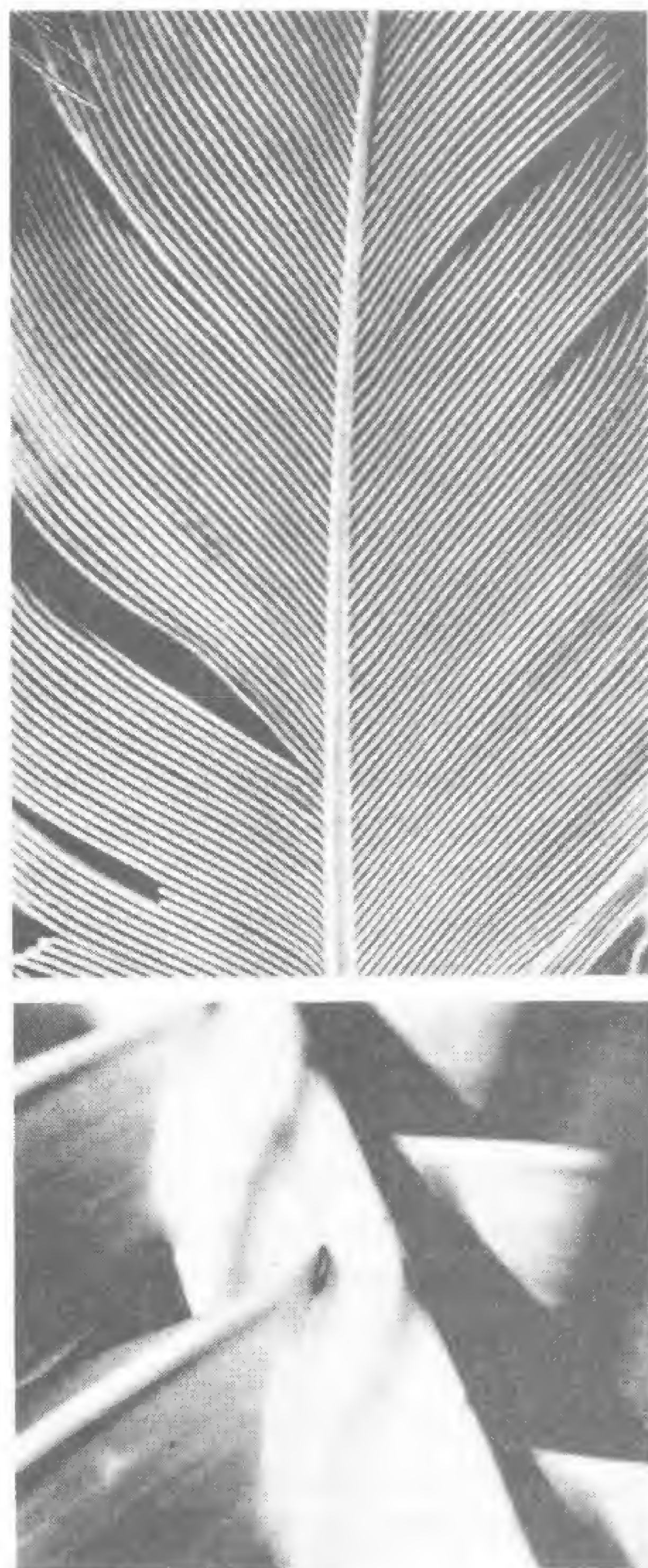


Fig. 21

constituye una casa unifamiliar. Ranko Bon, que ha efectuado estudios estadísticos acerca de las formas de los edificios, señala que las diferencias existentes en cuanto a dicha forma entre las edificaciones grandes y pequeñas no provienen de consideraciones estructurales, sino que se deben a que las habitaciones en las casas y apartamentos tienen aproximadamente el mismo tamaño, y en ambos casos es deseable disponer el mayor número posible de habitaciones con vistas al exterior. Así, cuando un edificio de grandes proporciones y numerosas habitaciones incrementa su superficie crítica (sus exteriores), alarga su forma. Al igual que ocurre con los organismos vivos, pues su tamaño absoluto determina su forma.



## 2. DISEÑOS BÁSICOS

*«Así pues, ese conocimiento es siempre el más valioso... el que considera las formas simples o las diferencias entre las cosas, cuyo número es limitado, y los grados y coordinaciones a partir de los cuales forman toda su variedad.»*

Francis Bacon

### Diseños básicos

Hemos visto ya cómo el espacio permite sólo la existencia de un número limitado de poliedros regulares y de mosaicos. En este capítulo analizaremos algunos diseños menos regulares. Aunque se trata de un capítulo breve, en el que las figuras ocupan la parte más importante, va a proporcionarnos la clave que nos permitirá entender todo lo que viene a continuación. Al examinar las propiedades geométricas de los diseños cuasirregulares podremos hacernos una idea de las razones por las que la Naturaleza prefiere algunos de ellos y rechaza otros. Así veremos por qué determinados diseños, como las espirales, las formas sinuosas y ciertas ordenaciones ramificadas, prevalecen en la medida en que lo hacen, y también la causa de que formas y fenómenos esencialmente diferentes muestren una sorprendente similitud.

En lo referente al modo en que los distintos diseños y morfologías que observamos en nuestro alrededor han llegado a surgir, podemos aceptar sin mayores dificultades la idea fundamental de la teoría evolucionista, según la cual todo se desarrolla o evoluciona hasta alcanzar formas cada vez más adaptadas a su entorno. Igualmente aceptaremos el principio que afirma que todos los cuerpos tienden a lograr la configuración que posea la menor energía posible, lo que se traduce en la tendencia a conseguir la adaptación más perfecta al medio, ya se trate de los seres vivos o de la materia inerte, a ocupar las menores alturas posibles, a efectuar la menor cantidad de movimiento,



etcétera. Asimismo admitiremos la teoría de que las formas existentes en la Naturaleza son precisamente aquellas que, teniendo en cuenta todas las posibilidades, tienen una mayor probabilidad de existir. Pero, podemos preguntarnos, ¿qué formas son las más adaptadas, las que poseen menos energía y las más probables? ¿Estamos en condiciones de prever sus características de antemano? ¿O de definirlas de otra forma que no sea la afirmación redundante de que representan los productos finales en la lucha por la supervivencia, la disipación de la energía o el ciego azar? Estudiando las propiedades geométricas de las posibles distribuciones de la materia en el espacio, ¿podremos predecir qué distribuciones serán favorecidas y en qué contexto?

Tal vez seamos capaces de responder de forma satisfactoria a todos estos interrogantes. En geometría plana, por ejemplo, comprobamos que una línea recta es el camino más corto entre dos puntos y que un círculo es un conjunto de puntos que equidistan de otro interior. En la Naturaleza, observamos la combinación de rectas y círculos en gran número de fenómenos, como en el fluir más o menos recto del agua de un arroyo que a trechos se remansa en pozas y adquiere un movimiento circular. Conociendo por un lado las propiedades del agua y por otro las características geométricas de las figuras y líneas a que da lugar, podemos predecir que las corrientes de agua fluirán y se remansarán según dichas formas, y determinar el trazado que mostrarán riachuelos y estanques. De la misma manera, podremos predecir que los cuerpos celestes describirán trayectorias rectas en el espacio vacío y órbitas circulares o elípticas cuando penetren en los campos gravitatorios creados por cuerpos aún mayores.

Señalemos de paso que las líneas y círculos adoptados por las formas naturales no son nunca perfectos. Los arroyos y los meteoritos no describen rectas exactas, ni los remansos y trayectorias orbitales constituyen círculos rigurosos. Las líneas rectas y los círculos son únicamente formas puras, entes abstractos cuya existencia está ligada a condiciones de extrema sencillez y exactitud, lo que nunca acontece en la Naturaleza, donde cualquier fenómeno aparentemente elemental o aislado forma parte de un sistema mayor que a su vez opera dentro de otros sistemas de complejidad creciente. La parte es siempre afectada en cierta medida por el conjunto (por la totalidad de sistemas), y no se ajusta en ningún caso a un modelo perfectamente

definible. La enseñanza resulta clara: la Naturaleza no se adapta de forma precisa a nuestros modelos simples e introduce continuas variaciones en respuesta a múltiples demandas.

Advirtiéndolo, pues, que vamos a ocuparnos de casos excesivamente simplificados, prosigamos nuestra exposición. Formemos algunos modelos sencillos siguiendo un procedimiento en verdad elemental. Unamos los puntos de la serie que se muestra en la figura 22 de forma que todos ellos estén ligados al punto central, ya sea di-

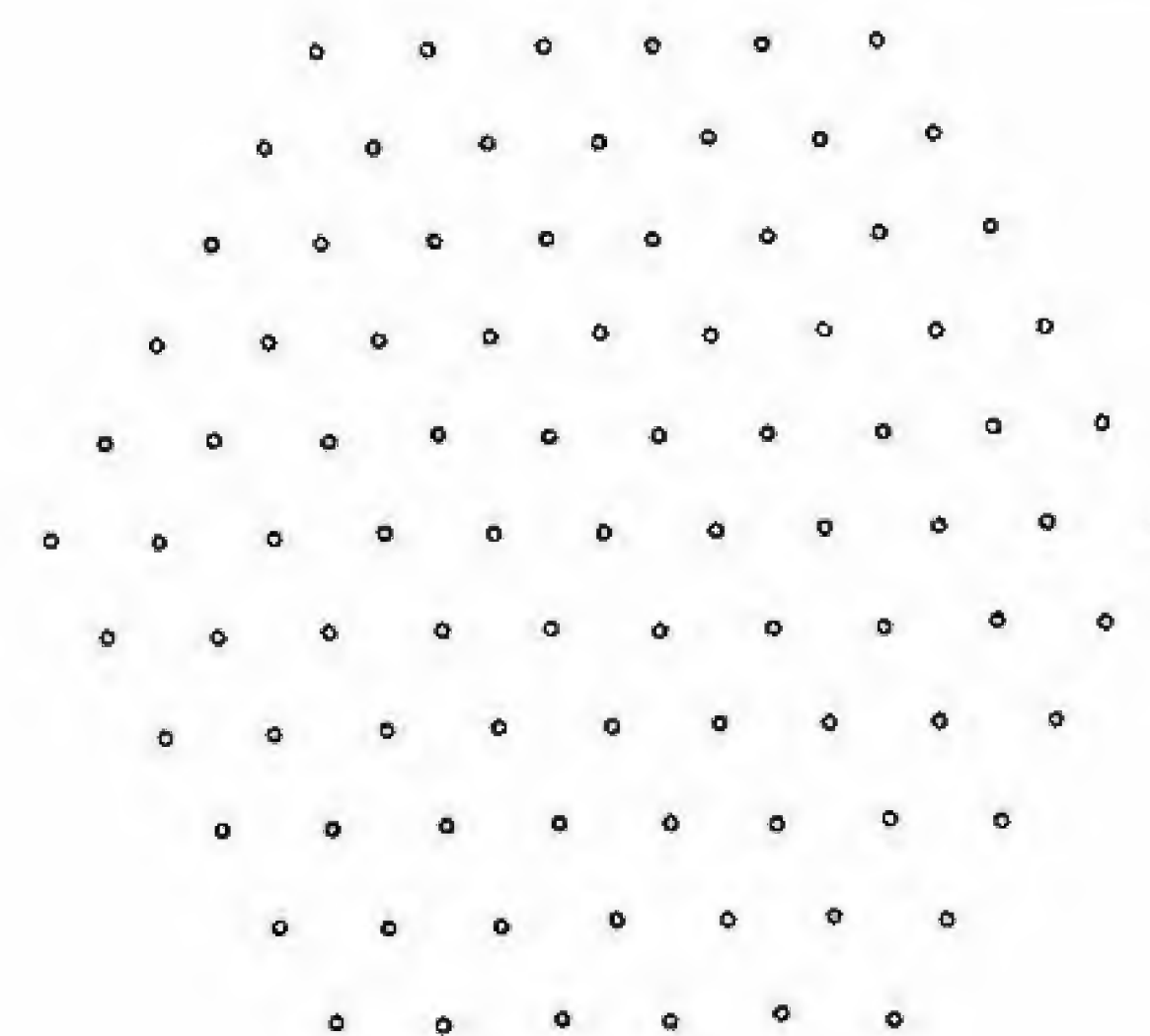


Fig. 22

recta o indirectamente, y que dos puntos cualesquiera se conecten sólo mediante una única trayectoria. En este ejercicio, podemos concebir el punto central como un centro de crecimiento, y suponer que dicho crecimiento se verifica hacia afuera directa o indirectamente para alcanzar todos y cada uno de los puntos situados en la periferia. Resulta así posible realizar un cierto número de trazados y formar varios diseños diferentes que satisfagan los anteriores requerimientos. Dichos diseños presentan propiedades geométricas distintas.

En primer lugar, con respecto al conjunto de puntos, observamos que cada uno de ellos se halla rodeado por otros seis de forma regular, de manera que se mantiene la misma distancia entre los que se encuentran más próximos. Es interesante destacar que una ordenación semejante sólo resulta posible en un plano. Si, por ejemplo, se mantiene constante la distancia entre los puntos contiguos de una



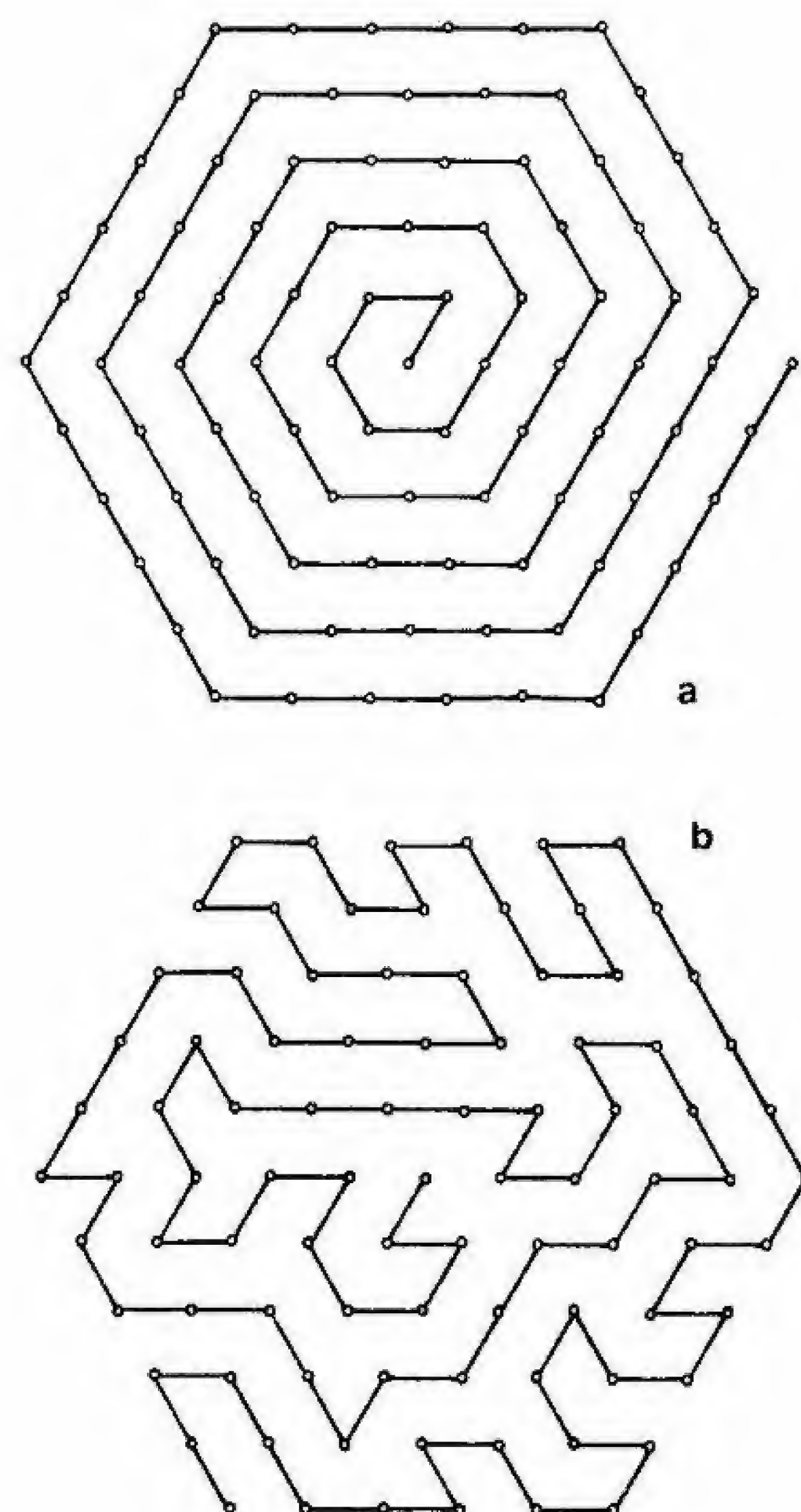


Fig. 23

esfera, cada uno de ellos puede estar rodeado por otros tres, cuatro o cinco, pero no por seis. Este análisis nos lleva a considerar de nuevo las formas regulares, y un rápido examen revela en efecto que los distintos poliedros regulares de la figura 5 presentan sus puntos o vértices ordenados sobre la superficie de una esfera imaginaria de forma que cada vértice está rodeado por tres, cuatro o cinco poliedros.

Observando la ordenación regular de puntos, encontramos, como muestra la figura 23a, que resulta fácil comenzar por el centro e ir trazando espirales sucesivas, de dentro afuera, hasta unir todos los puntos. También podemos, como se ve en la figura 23b, empezar

por el centro y continuar avanzando para unir los puntos mediante una larga línea sinuosa. Tanto la espiral como la forma sinuosa tienen exactamente la misma longitud. Si asignamos a la distancia comprendida entre dos puntos contiguos el valor de una unidad, encontramos que ambos trazados contabilizan 90 unidades. Además, si en el recuento de distancias consideramos las trayectorias comprendidas entre el punto central y el primero de ellos, entre el centro y el segundo, entre el centro y el tercero, y así sucesivamente, como trayectorias independientes, el promedio de distancias de las mismas, tanto en un modelo como en otro, es de 45.5 unidades. Este parámetro, la distancia media, resulta de gran utilidad cuando comparamos entre sí diseños diferentes, como después veremos.

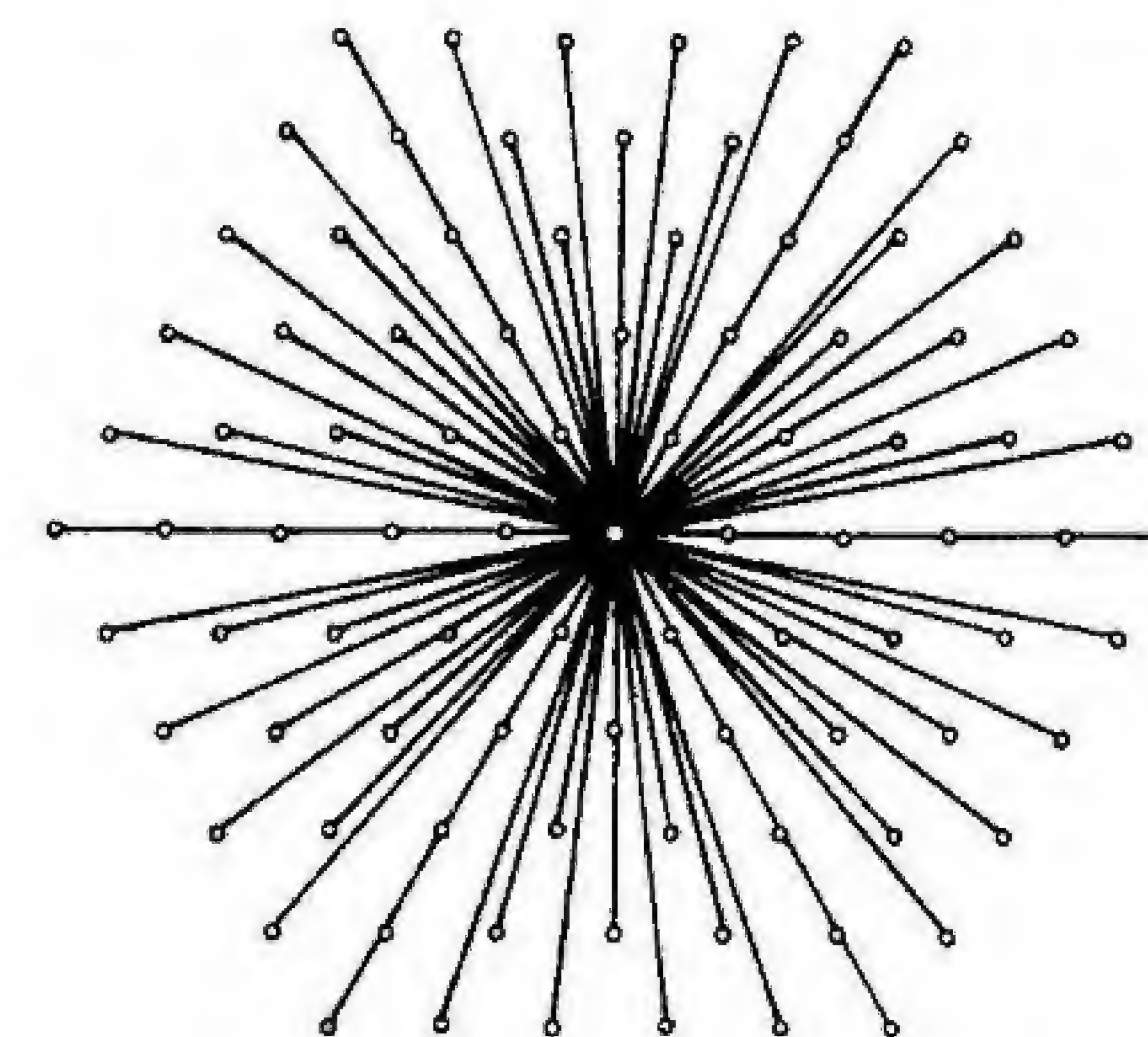
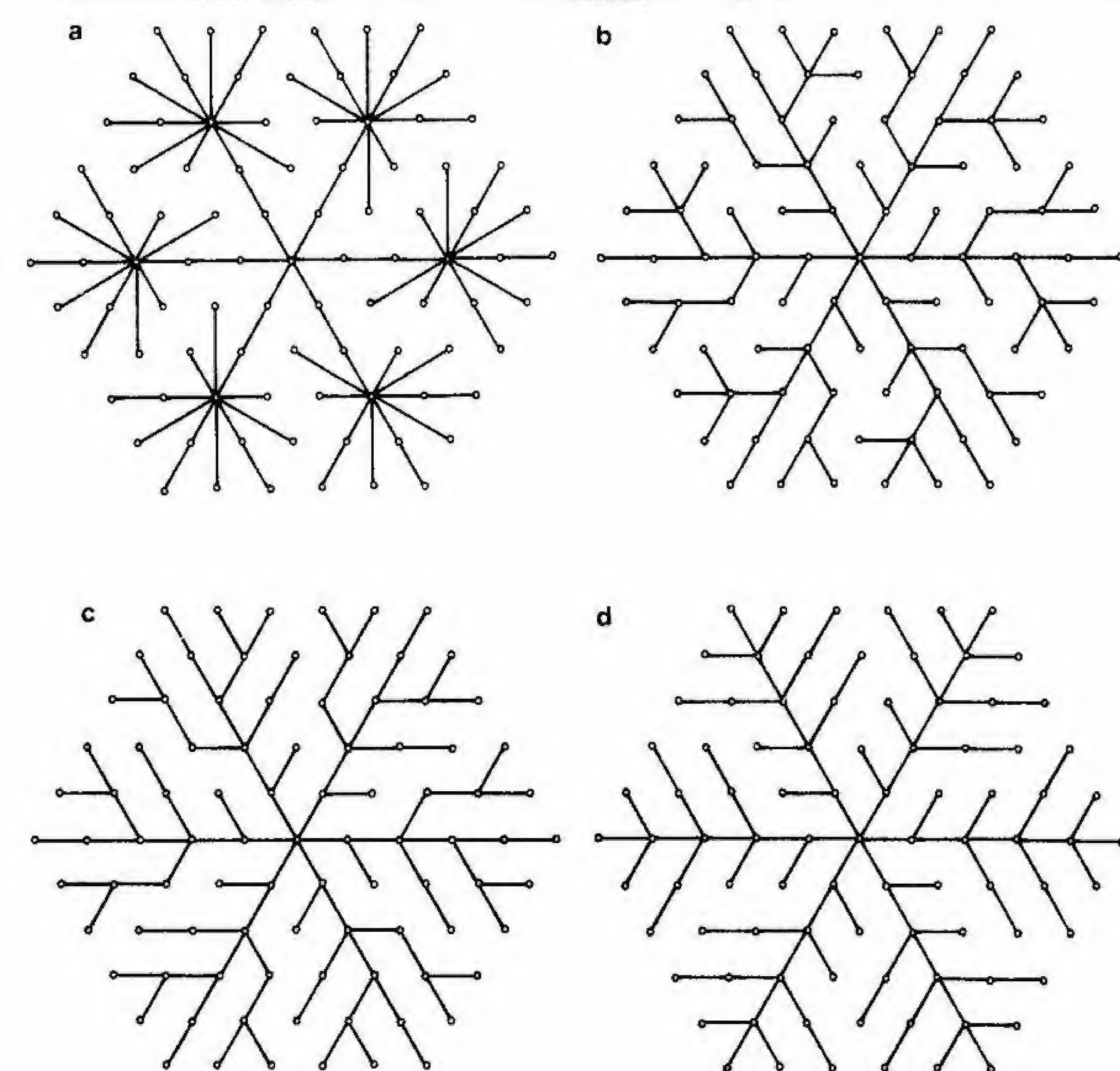


Fig. 24

La figura 24 muestra una forma por completo diferente de unir entre sí los puntos: consiste en conectar directamente el centro con los puntos de la periferia según un diseño característico que podríamos denominar de explosión. La distancia total de todas las líneas radiales resulta ser de 233.1 unidades, considerablemente mayor que el valor de 90 unidades obtenido en el caso de la espiral y de la trayectoria sinuosa. La distancia media, calculada al igual que se hizo anteriormente como el promedio de las distancias comprendidas entre los puntos periféricos y el centro, es de sólo 3.37 unidades, mucho menor que las 45.5 unidades de las figuras precedentes. El



**Fig. 25**

diseño en forma de explosión tiene por tanto una longitud total de trazado mucho mayor, pero como contrapartida presenta una distancia media notablemente más corta: utiliza en su conjunto una línea mucho más larga para unir los puntos, pero las conexiones con los mismos son más directas. Consideremos ahora las formas ramificadas. De nuevo, en la figura 25a, el punto central se enlaza con los restantes puntos, pero cada uno de los seis grandes brazos que componen la figura acaba en un conjunto de ramas simples. La longitud total del trazado es de 107,6 unidades, menos de la mitad de la longi-

tud total del diseño en forma de explosión. La distancia media es de 4,25 unidades.

La figura 25b muestra un diseño en el cual tanto las ramas secundarias como las principales presentan ramificaciones. La longitud total es de sólo 90 unidades, valor idéntico al de la espiral, y la distancia media es de 3,73, no muy superior a las 3,37 del diseño en forma de explosión. Una distancia media aún menor, de 3,67 unidades, la encontramos en los diseños ramificados de las figuras 25c y d, con una longitud total también de 90.

¿Qué nos enseñan estos diseños? Entre otras cosas, revelan que las espirales y explosiones representan dos situaciones extremas. La espiral es corta, pero conecta los diferentes puntos de una forma demasiado tortuosa e indirecta: sería un buen camino para una lombriz de tierra o para el visitante de un museo. Es interesante observar que tanto Frank Lloyd Wright como Le Corbusier diseñaron museos espirales: el primero, el Solomon R. Guggenheim de Nueva York, circular, y el segundo, el llamado «Museo de la Expansión Ilimitada», de planta cuadrada, prototipo que tuvo numerosas variantes. Evidentemente, sin embargo, una espiral no constituye una forma adecuada, por ejemplo, para un árbol, que debe transportar nutrientes entre su tronco central y las hojas situadas en la periferia a lo largo de un itinerario razonablemente directo. El modelo de explosión, por otra parte, minimiza la distancia a recorrer entre el centro y los puntos externos, si bien el trayecto total es enorme. Constituiría un diseño adecuado para describir la disposición de las rocas esparcidas en un paisaje dado, pero no resulta idóneo para un árbol: éste no puede sostener cada una de sus hojas mediante ramas individuales y separadas unas de otras.

Resulta que las formas ramificadas son un compromiso entre la trayectoria espiral, indirecta y única, y las múltiples rutas directas que presenta el diseño en forma de explosión: se obtiene así una longitud total corta a expensas de una serie de caminos indirectos situados aquí y allá, gracias a lo cual se consigue un ahorro en el conjunto sacrificando algunas de las partes. En efecto, la ramificación constituye una excelente solución de compromiso, ya que la longitud total no es mayor que la de una espiral (de hecho, puede ser incluso menor, como ya veremos) y su distancia media es ligeramente superior a la



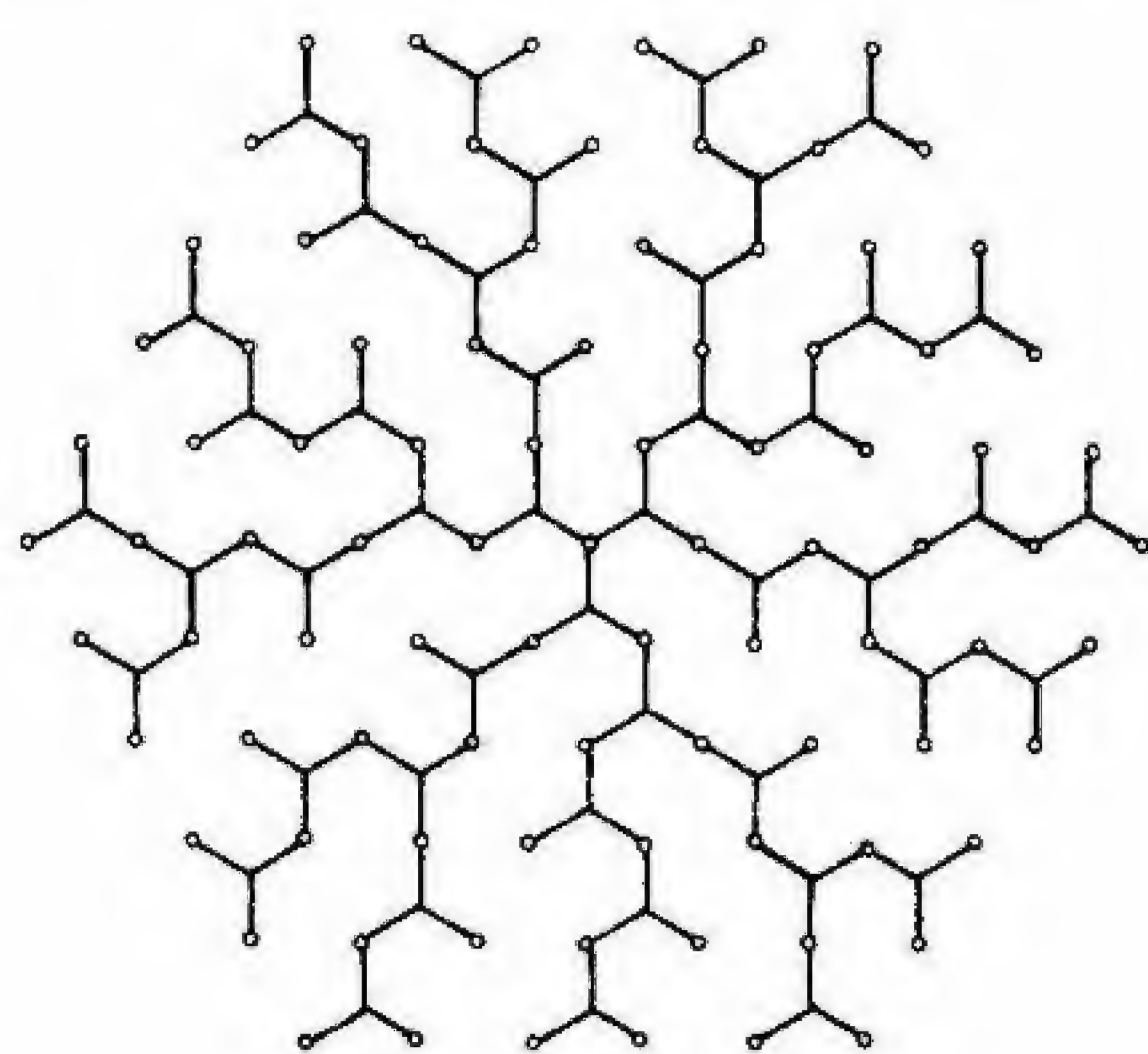


Fig. 26

mínima posible, que corresponde a la explosión. De esta manera se combina lo mejor de los dos diseños: trayectoria reducida y acceso directo al centro.

En la figura 26 se representa un diseño ramificado en el que la longitud total es menor que la de cualquiera de los modelos precedentes: su valor es sólo de 77,9 unidades, el 13 % menos que en la espiral o en la forma sinuosa. El diseño se caracteriza por poseer uniones triples, con ángulos de  $120^\circ$ . Más adelante estudiaremos esta disposición con mayor detalle, pero observemos aquí que, con su longitud total mínima, constituye un extremo o polo dentro de las figuras ramificadas, siendo el otro el diseño en forma de explosión, con una distancia media mínima. Hay que resaltar que dicha disposición, ramificada con uniones de tercer orden, tiene una distancia media de 4,2 unidades (más que en el caso de la explosión y que algunos de los diseños ramificados vistos).

De esta forma, hemos descubierto ya diferentes diseños típicos: el de la espiral, el sinuoso, el de la explosión y varias formas de ramificación. Podemos describir ahora tales diseños básicos en términos de cuatro propiedades geométricas: 1. uniformidad; 2. ocupación del espacio; 3. longitud total; 4. acceso directo con respecto al centro.

La espiral es bellamente uniforme: se curva alrededor de sí misma con perfecta regularidad. Puede ocupar todo el espacio bidimen-

sional disponible y es capaz de experimentar una expansión infinita, y además es bastante corta. Sin embargo, en lo que se refiere a su conexión con el centro, resulta en extremo indirecta.

El diseño sinuoso aleatorio es muy parecido al anterior, excepto en el hecho de que no posee uniformidad: su forma es turbulenta y caótica. Sin embargo, como la espiral, puede ocupar todo el espacio bidimensional, y es corto e indirecto.

El diseño en forma de explosión es uniforme en cuanto que mantiene constantes sus ángulos formados por las líneas radiales que parten del centro. Debe señalarse, sin embargo, que, a diferencia de lo que ocurría con los diseños anteriores, no puede ocupar todo el espacio uniformemente: la densidad es mayor cerca de la región central que en las zonas alejadas de la misma. Además, como ya hemos visto, la suma de las líneas radiales que lo integran da un valor muy elevado. De cualquier forma, este modelo destaca por unir directamente los puntos externos con el central en mayor medida que otros diseños.

Las formas ramificadas son menos uniformes y presentan más variaciones en sus detalles que las espirales o las explosiones, pero ocupan todo el espacio, son de trayectorias cortas y relativamente directas. Además, las ramificaciones con uniones regulares triples son más cortas que cualquiera de los restantes diseños.

No hemos examinado cómo se dan en la Naturaleza dichos diseños, pero con el simple conocimiento de sus características geométricas estamos en condiciones de comprender las razones por las que podrían ser adoptados por las formas naturales. Ordenaciones diferentes presentan ventajas espaciales también diferentes. Así, en la distribución de los vasos sanguíneos, el itinerario del metro en una gran ciudad o el diseño de columnas bifurcadas concebidas para sustentar un techado de determinadas características, casos todos ellos en los que tanto la longitud total como el acceso directo son importantes, un mismo modelo de ramificación podría resultar ventajoso. Vemos, pues, que ciertos modelos reportan determinadas utilidades y rendimientos, con independencia del tamaño del sistema, el tipo de fuerzas implicadas o los materiales que se hayan utilizado.

A modo de ejemplo, la figura 27 muestra dos modelos arquitectónicos de columnas ramificadas: tanto las diseñadas por Gaudí en





Fig. 27

la Sagrada Familia (a) como las del estudio estructural debido a Frei Otto (b) sustentan el techado en múltiples puntos, permitiendo que éste sea fino y ligero. Las bifurcaciones de cada columna unen los diferentes puntos del techo con un único punto del suelo, gracias a

lo cual la cantidad de material empleado es menor y las trayectorias descritas resultan razonablemente directas. Si los ramales de las columnas comunicaran directamente cada punto del techo con un punto único del suelo, o si cada punto del primero estuviera sustentado por una columna independiente, se precisaría un cantidad mucho mayor de material en su construcción y, puesto que tanto los ramales separados como las columnas serían más largos, se hallarían sometidos con más probabilidad a los efectos de combamiento y pandeo.

Debemos señalar que podrían utilizarse también algunos otros parámetros geométricos para describir los modelos estudiados, como, por ejemplo, el total de todas las trayectorias o distancias individuales, las distancias medias desde cada punto y no sólo desde el centro, etc. Analizando estos y otros parámetros, resultaría posible establecer agrupamientos o jerarquías de diseños diferentes. De la misma forma que los grupos estudiados nos han permitido extraer valiosas conclusiones acerca de las razones por las que la Naturaleza adopta un tipo de diseño en una circunstancia concreta, otras clasificaciones basadas en propiedades geométricas distintas serían, sin duda, igualmente reveladoras.

Nuestros diseños, aun cuando no sean los únicos que pueden establecerse, surgen de forma natural, como ya hemos visto, a partir

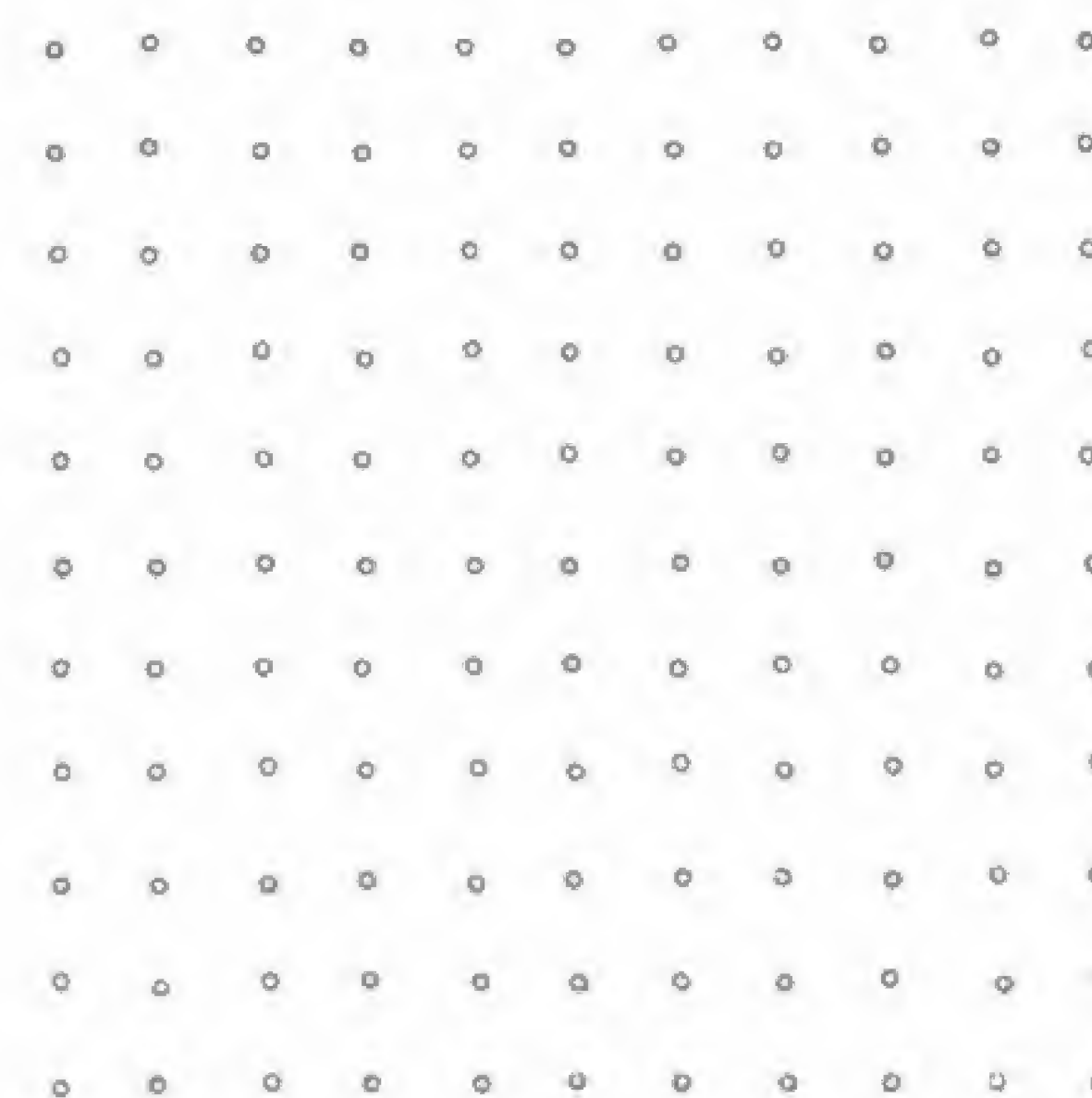


Fig. 28



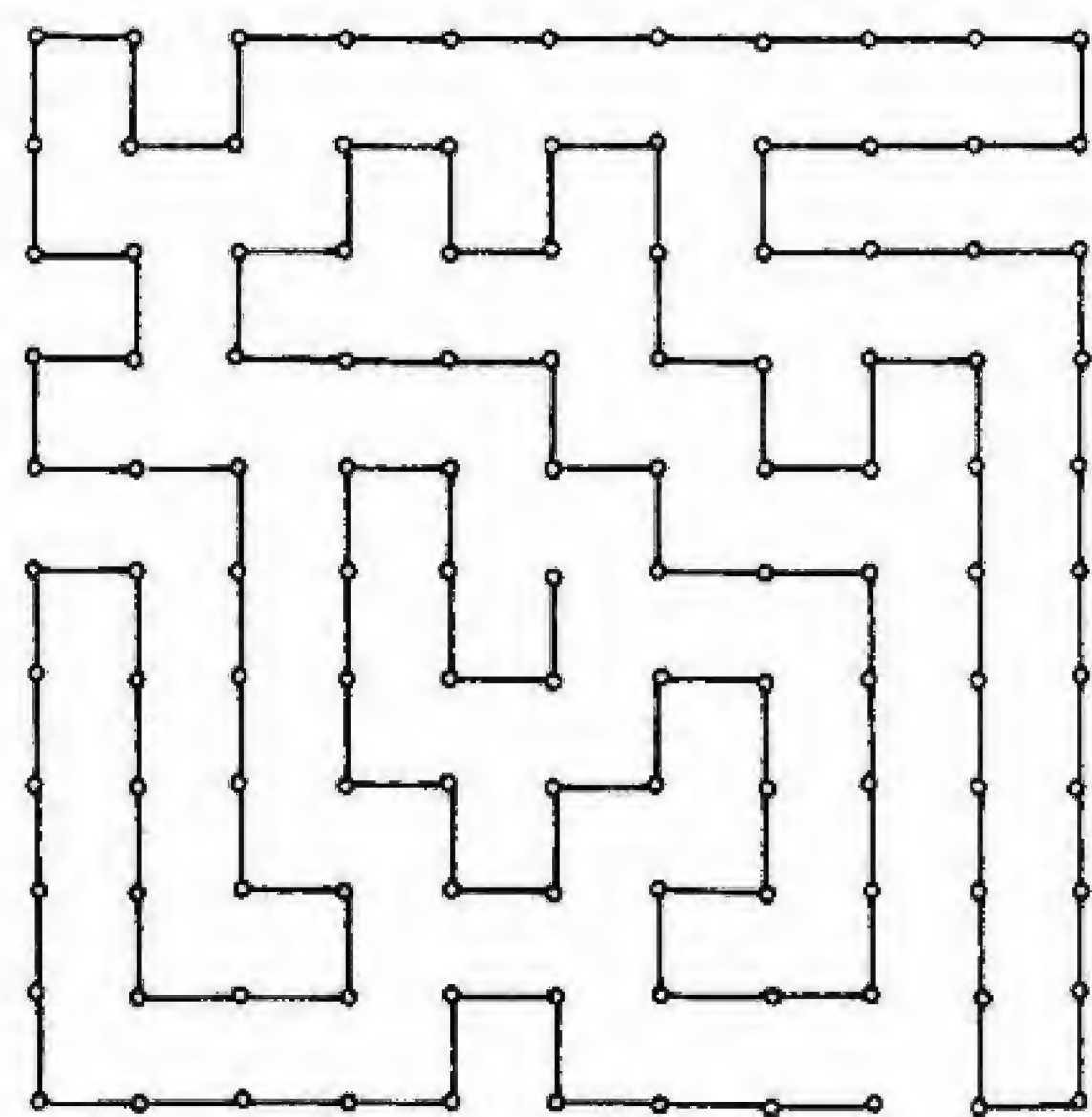


Fig. 29

de las interconexiones entre puntos ordenados en una serie triangular. También pueden obtenerse por medio de las uniones de puntos en una serie cuadrada, según puede apreciarse en la figura 28. Es posible formar fácilmente un diseño sinuoso, como el que aparece en la figura 29. Si a la distancia entre dos puntos contiguos se le asigna el valor unidad, la longitud total del trazado es de 120 y la distancia media (hallada como ya vimos con anterioridad como promedio de las distancias de cada punto al centro) es igual a 60.5 unidades.

También pueden obtenerse la espiral simple y sus numerosas variantes, representadas en la figura 30. Todas ellas tienen una longitud total de 120 unidades. La espiral más simple (a) presenta una distancia media de 60.5 unidades. El diseño meandriforme diagonal (b) tiene una distancia media de 37.7, mientras que tanto en el modelo meandriforme horizontal (c) como en la espiral doble (d) este parámetro vale 30.5 unidades. En las dos últimas figuras, espirales cuádruples (e y f), el valor es mínimo: 15.5. Así, vemos que la ramificación a partir del centro reduce la distancia media, es decir, conecta los puntos periféricos de una forma mucho más directa.

Los diseños en forma de explosión se muestran en la figura 31. Las longitudes del trazado en los cuatro casos son, de izquierda a derecha y de arriba abajo, las siguientes: 364.8, 280.2, 228.4 y 160.0. Cuanto mayor es la ramificación que presenta una explosión, menor

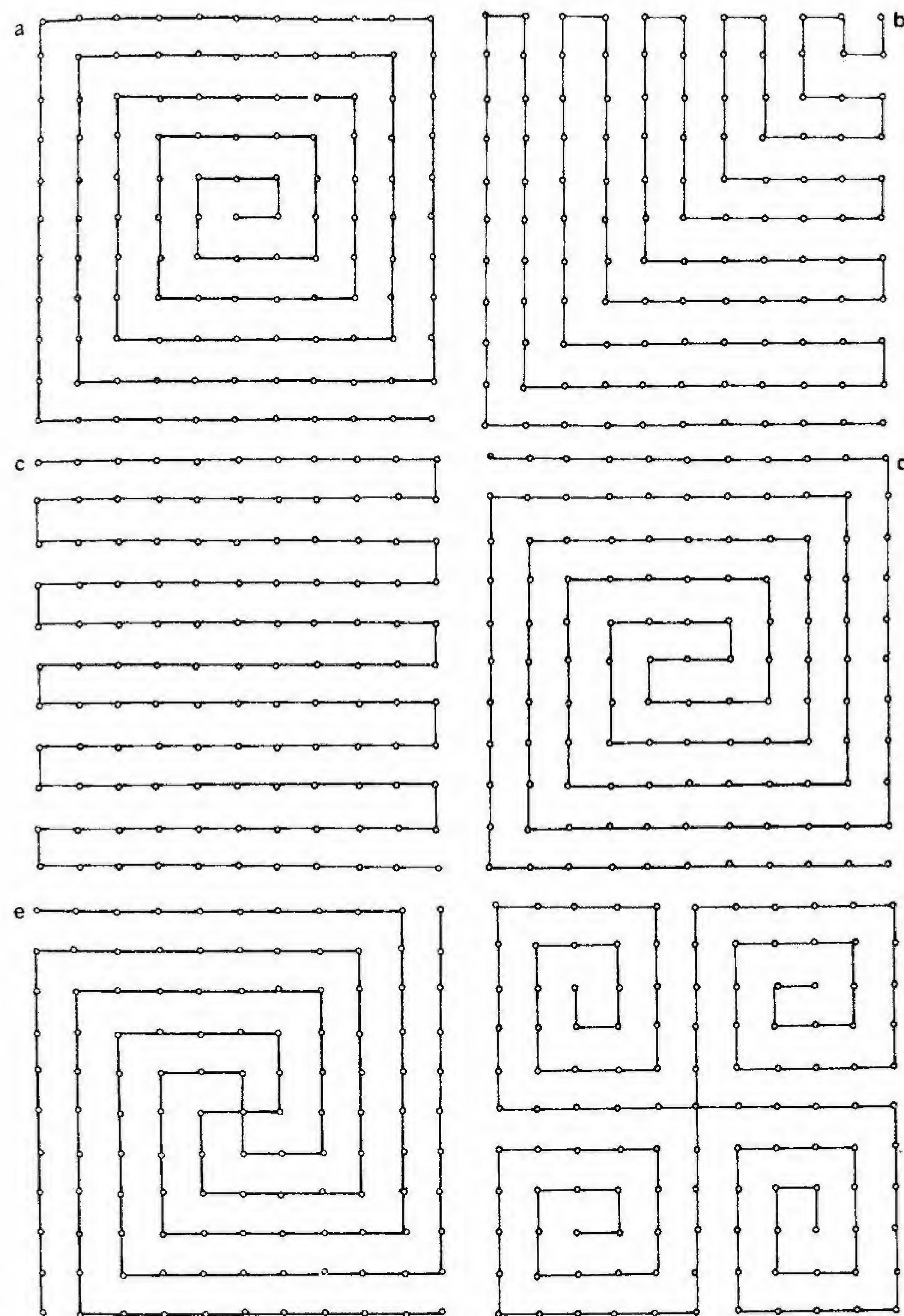


Fig. 30



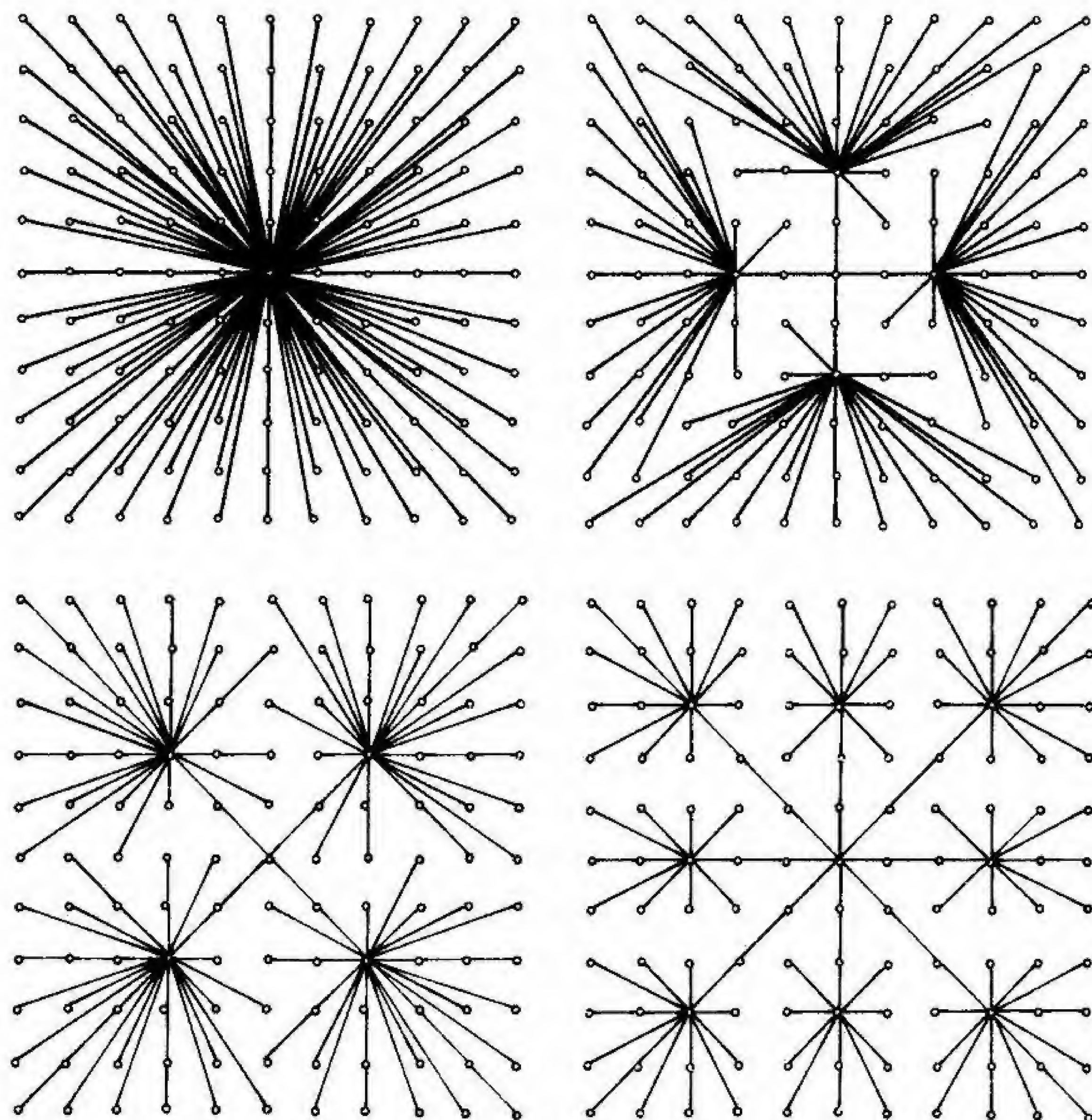


Fig. 31

es la longitud total, como puede comprobarse. Ha de señalarse, sin embargo, que ninguna de las formas ramificadas tiene una distancia media tan baja como la forma simple, que ocupa el primer recuadro. Los valores numéricos respectivos de este parámetro en los cuatro casos son: 4,0, 4,7, 5,0 y 4,8 unidades.

La figura 32 muestra otras variantes de diseño ramificado, la mayoría de las cuales son cortas y directas. Los diseños de las figuras 32a y b, con ejes centrales, tienen, respectivamente, una longitud to-

tal de 120 y 155,1 unidades y distancias medias de 5,5 y 5,2. Las figuras 32c y d, con doble eje del que parten las ramificaciones, poseen longitudes totales de 128,3 y 161,4 unidades, y distancias medias de 4,4. El diseño de ramificaciones escaleriformes sobre doble eje (e) y el de trenzado (f) presentan longitudes totales de 120 y 155,1 y distancias medias de 5,5 y 4,5. Las dos últimas figuras muestran valores de 120 y 5,5 unidades para cada uno de los dos parámetros analizados.

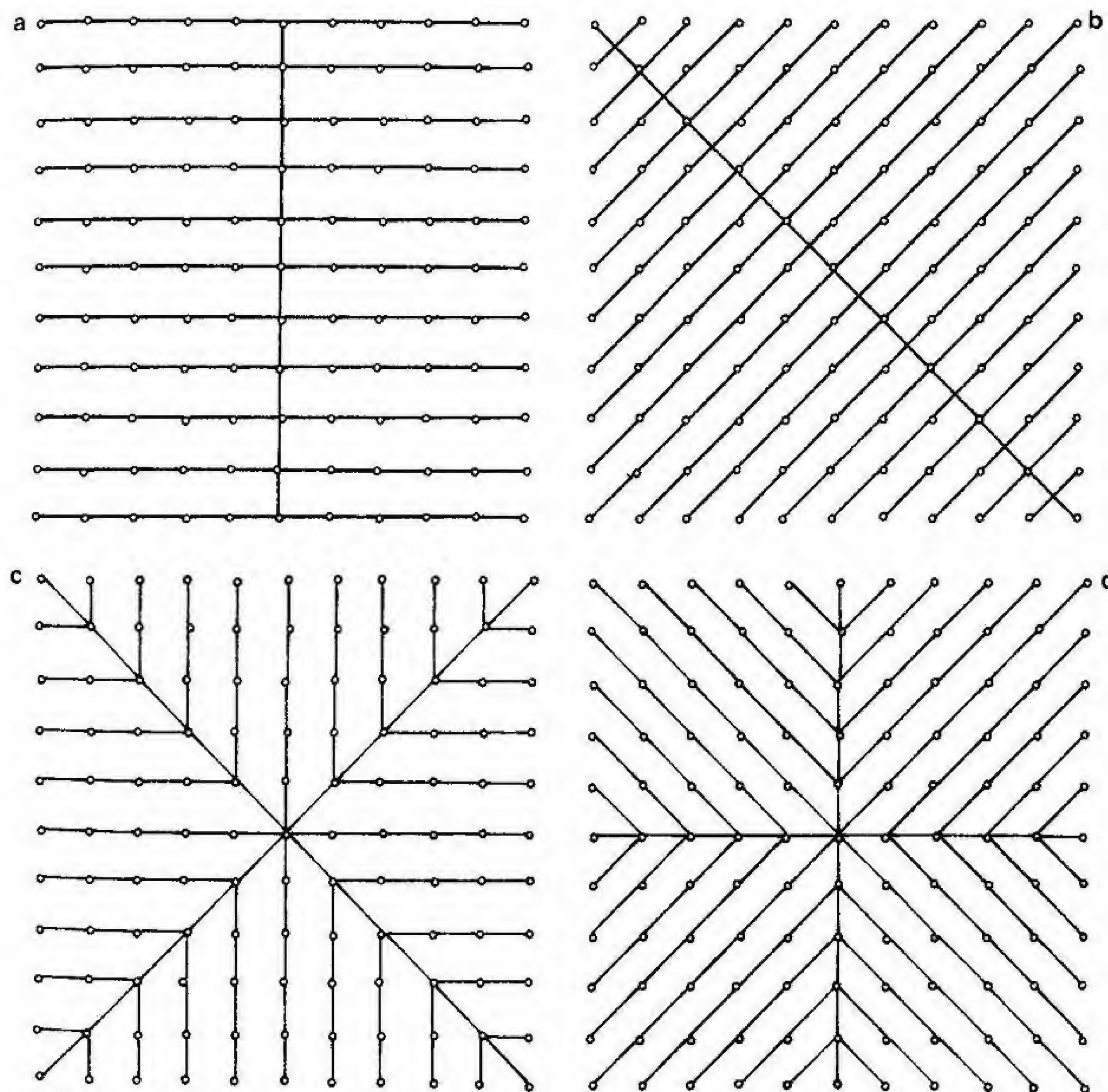


Fig. 32



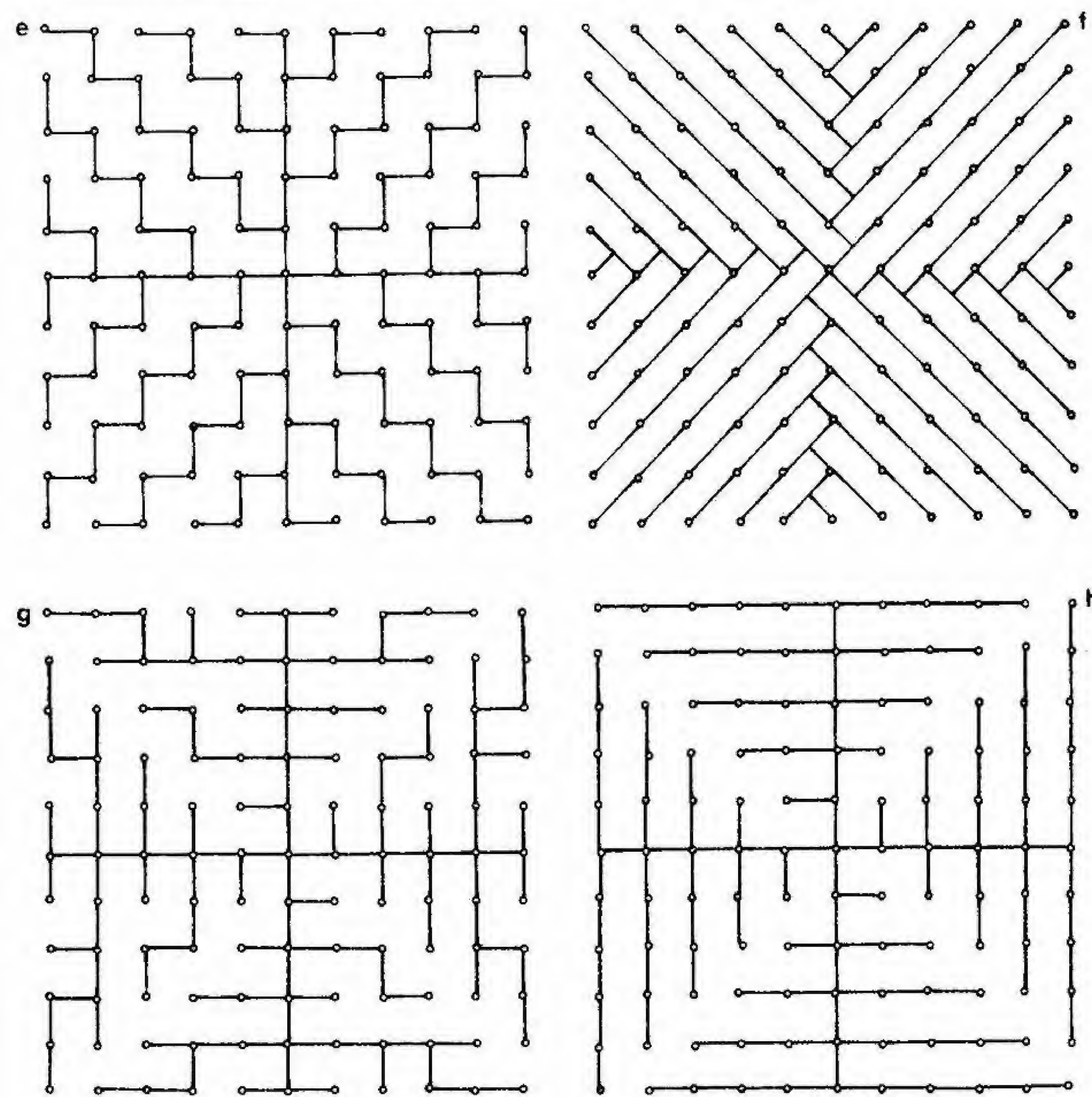


Fig. 32 (continuación)

La estructura ramificada más corta es de nuevo la que posee uniones triples, representada en la figura 33. La longitud de su trazado es de 109,5 unidades, frente a las 120 de la espiral simple. Sin embargo, la configuración resulta muy indirecta y la distancia media es de 9,3 unidades, comparada con las 4 unidades del diseño en forma de explosión.

Encontramos, además, los mismos diseños, que ya nos son fami-

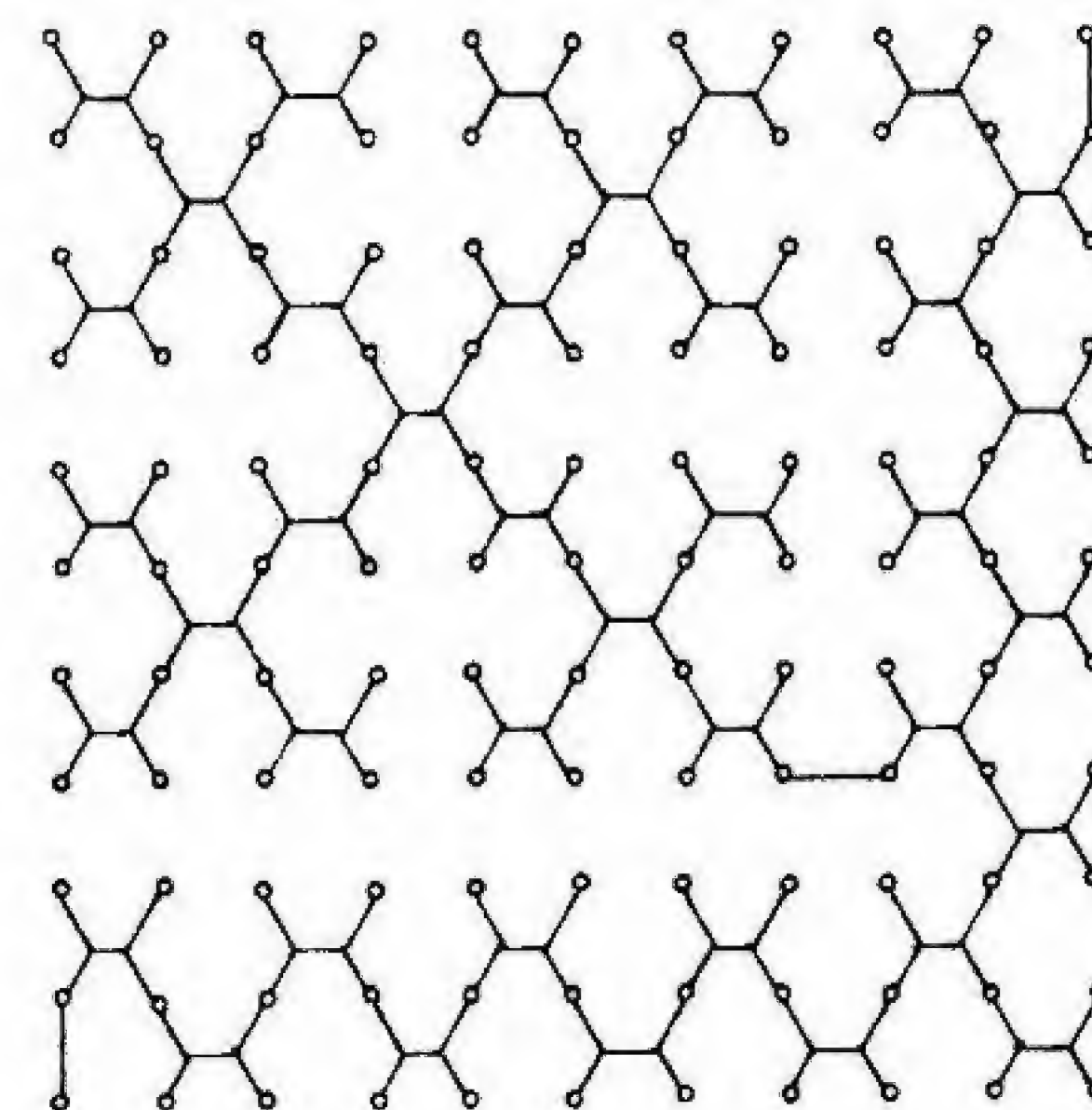


Fig. 33

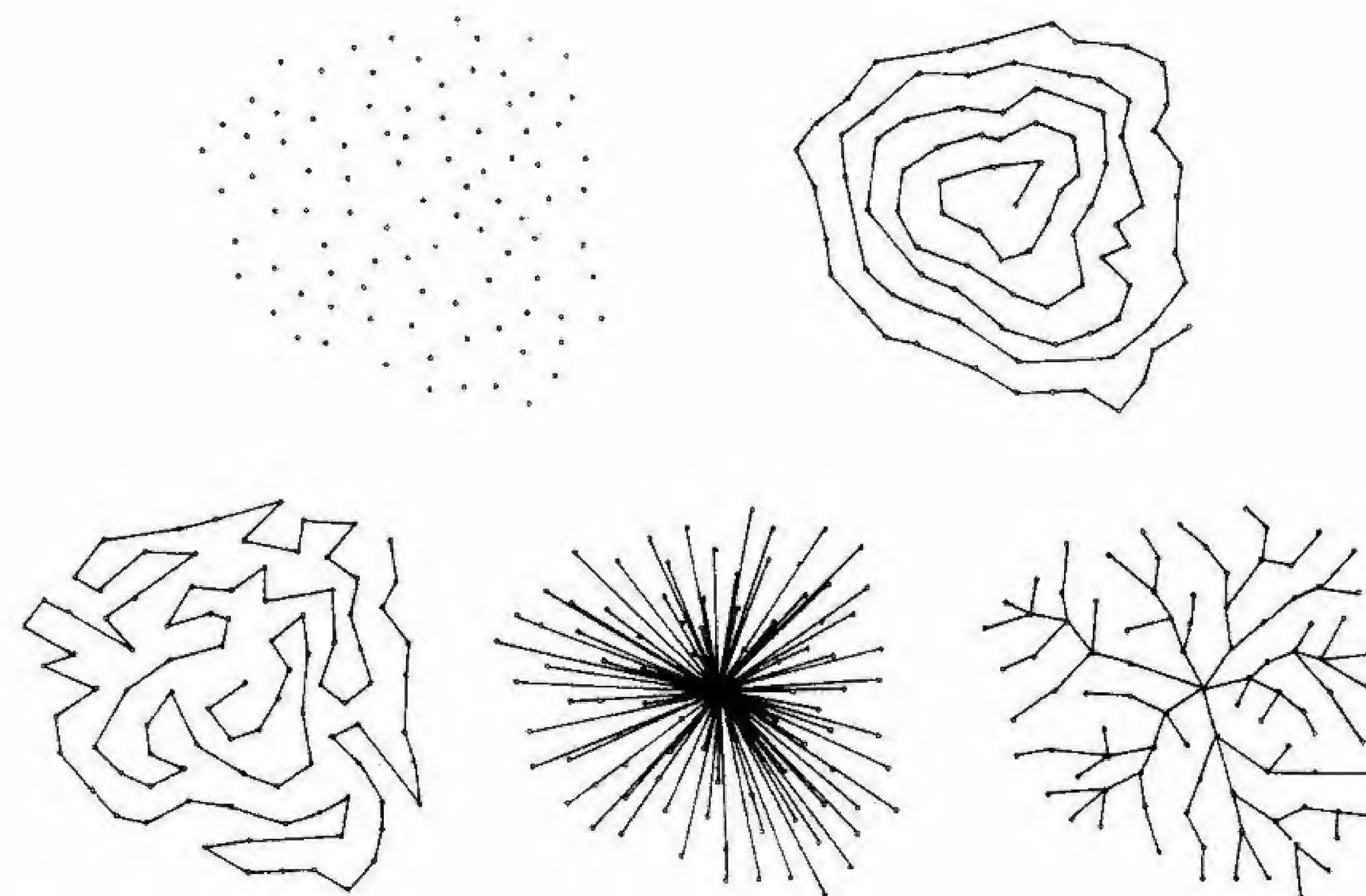


Fig. 34



liares, en series de puntos distribuidos de forma aleatoria, tal como vemos en la figura 34. En las distintas configuraciones, cada punto se une al centro por medio de una única ruta. Los diseños son más caprichosos e irregulares que los estudiados hasta ahora, pero cada uno de ellos representa claramente un modelo diferente.

También en el espacio pueden formarse estos diseños. La espiral se transforma en dicho caso en una estructura helicoidal, semejante a un sacacorchos (que, al contrario de lo que ocurría con su análogo bidimensional, no ocupa todo el espacio); el trazado sinuoso aleatorio se convierte en una intrincada maraña, similar a un cordel enredado, y los diseños en forma de explosión y ramificados resultan ser análogos a sus correspondientes figuras bidimensionales.

### Topología

Antes de estudiar en la Naturaleza ejemplos de los diseños vistos anteriormente, consideremos un último aspecto de los mismos, en el que se muestra de forma clara y contundente cómo sus parámetros y características geométricas dependen en último término de las restricciones espaciales. En cada uno de los diseños, la relación entre el número de líneas y el de puntos es la misma: las primeras son siempre una unidad menor que los segundos. Esta restrictiva relación se mantiene en todos aquellos modelos que no contienen bucles y en los que hay una única línea tendida entre dos puntos cualesquiera. En el sencillo ejemplo de una línea que une sólo dos puntos, resulta fácil comprobar que la relación antes enunciada es cierta, como ocurre también en el caso de la espiral simple de la figura 30; pero en los complejos diseños ramificados de la figura 33 la constancia de la relación no resulta tan evidente y, sin embargo, en todos ellos se verifica igualmente la regla.

Lo que interesa destacar aquí es que, en cualquier diseño, los puntos que unen varias líneas equilibran a los que unen una sola. Este balance que podríamos denominar «de trueque» permite al número total de puntos y líneas diferir exactamente en una unidad. El trueque ocurre, por supuesto, de forma automática, sin que intervenga ningún cálculo previamente desarrollado en el proceso: es el propio espacio el que lo determina. Podemos describir dicho balance

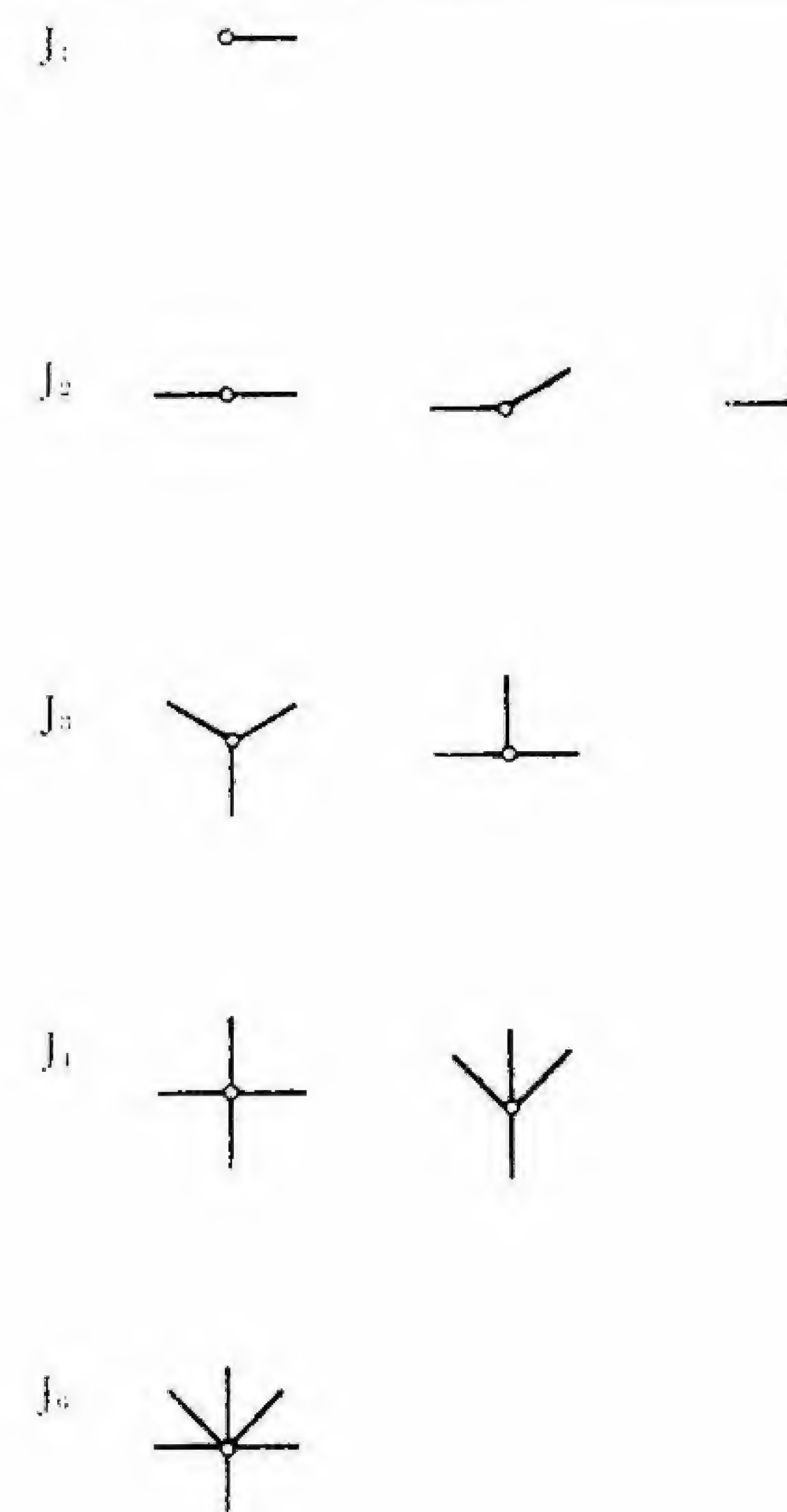


Fig. 35

en términos de una sencilla ecuación topológica. Si, según la figura 35, designamos al número de uniones simples o de primer orden (puntos que se hallan situados al final de una línea) como  $J_1$ , al de uniones dobles o de segundo orden (puntos que unen dos líneas) como  $J_2$ , al de uniones triples o de tercer orden (los que unen tres líneas), como  $J_3$ , etc., podemos escribir la expresión:

$$1 J_1 \pm 0 J_2 - 1 J_3 - 2 J_4 - \dots = 2$$

La espiral de la figura 30a tiene dos uniones simples que señalan



su comienzo y su final, más 119 uniones dobles. Sustituyendo en la expresión anterior:

$$1 (2) \pm 0 (119) = 2$$

La explosión de la figura 31a tiene 80 uniones simples, 40 uniones dobles y 1 unión de orden octogésimo (80 líneas), de manera que:

$$1 (80) \pm 0 (40) - 78 (1) = 2$$

De forma similar, el diseño de la figura 31b, con 80 uniones simples, 36 dobles, 1 de cuarto orden y 4 de vigésimo primer orden, tendrá la expresión:

$$1 (80) \pm 0 (36) - 2 (1) - 19 (4) = 2$$

Cada diseño se muestra conforme con la regla. Siempre que no contengan bucles, ya sean diseños realizados por el hombre o surjan en la Naturaleza, obedecen a la misma expresión matemática.

Debe hacerse notar que los diseños con bucles o áreas cerradas (con más de una ruta entre los puntos), como el que aparece en la figura 36, obedecen asimismo a leyes matemáticas rigurosas. Estos diseños se incluyen en sólo diecisiete grupos de simetrías distintos. Cada figura bidimensional repetitiva, ya se trate de ladrillos, fibras textiles, papel pintado, los módulos de una ciudad planificada o la ordenación de las moléculas en la sección transversal de un cristal, no constituyen sino variaciones de uno de estos diecisiete grupos, los cuales se construyen por movimientos de traslación, rotación o reflejo especular de sus partes constituyentes. Tales grupos se hallan fuera del ámbito de este estudio, pero su reducido número revela una vez más cuán limitadas son las posibilidades que ofrece la ordenación espacial.

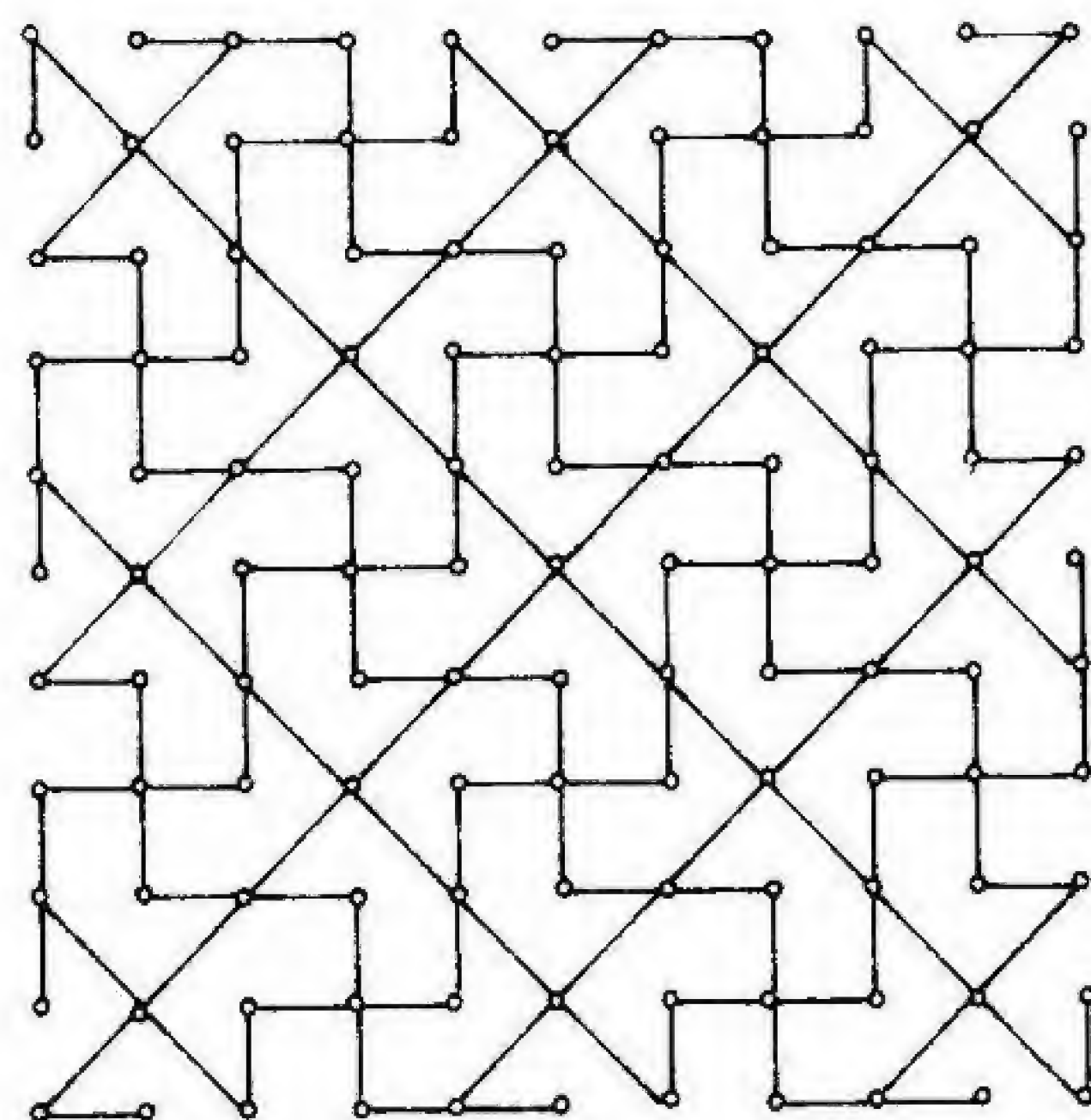


Fig. 36



### 3. TODO FLUYE

*«¿Puede alguien comprender el despliegue de las  
nubes?»*

Job 36, 29

Según el antiguo filósofo Heráclito, la única realidad de la Naturaleza radica en el cambio. Todo se transforma, todo fluye. Y, al mismo tiempo, todo permanece. Los físicos modernos se enfrentan con esta paradoja cuando estudian el flujo y los fenómenos de turbulencia. Una nueva agua sustituye a la anterior, pero el modelo sigue siendo el mismo.

#### **Turbulencia**

La turbulencia constituye el modelo primordial, el caos que estaba «en el principio». Todos nos hallamos familiarizados con los fenómenos de turbulencia. Al verter crema en el café y observar los jaspeados remolinos que se forman, se rizan y giran en la superficie, o al contemplar el ascenso del humo de una chimenea y el modo en que se fragmenta y divide en espirales, estamos asistiendo a procesos de esta índole. Pero el diseño exacto resulta difícil de describir: la turbulencia no se ajusta de manera precisa a ninguno de los modelos estudiados en el capítulo anterior. En parte, estos fenómenos muestran una cierta semejanza con las formas sinuosas de las figuras 23b y 29, y, en efecto, ocurre que cualquier partícula situada en el seno de un flujo turbulento describe una trayectoria errática y ondulante. Pero dicho flujo presenta también remolinos, similares a las configuraciones de las figuras 23a y 30a. De hecho, son precisamente estos remolinos los que caracterizan y diferencian un flujo turbulento de otro laminar.



Las espirales las estudiaremos con más detenimiento en el próximo capítulo, limitándonos aquí a señalar que un remolino en espiral se produce cuando una corriente de fluido, un arroyo por ejemplo, sufre una fricción contra la superficie que lo limita (las orillas en nuestro ejemplo) o contra otra corriente que se mueve en dirección opuesta. La corriente pierde velocidad en virtud de la propia fricción en los puntos en que ésta tiene lugar, y se fragmenta en partes que giran sobre sí mismas. En el límite mismo, el flujo tiene una velocidad nula, y ésta es la razón por la cual las diminutas partículas de polvo se depositan sobre las paletas de un ventilador y no caen de las mismas, o la causa de que no sea posible eliminar dichas partículas soplando cuando se hallan en la superficie de una mesa, por ejemplo. Sólo partículas grandes que sobresalgan en la superficie pueden ponerse en movimiento y ser llevadas por la brisa. A medida que la distancia a la superficie limitante se incrementa, el flujo aumenta su velocidad y la diferencia de velocidades determina que la corriente gire sobre sí misma, al igual que una ola se riza cuando tropieza con el fondo arenoso de la playa y se precipita sobre ésta.

Aunque esperamos encontrar remolinos en un flujo turbulento, no sabemos cuándo se va a producir o extinguir un determinado remolino, al igual que tampoco podemos predecir cómo interactúan éstos. De forma similar, sabemos que, por regla general, cualquier partícula que se halle en el seno de un flujo turbulento vagará de una forma errática, a merced de los torbellinos que se originen, describiendo una trayectoria sinuosa, pero somos incapaces de predecir la situación precisa y la velocidad de la partícula en un momento dado. Semejante incapacidad para prever detalles del flujo turbulento representa un grave impedimento en numerosos campos: experimentamos grandes dificultades para predecir el tiempo, interpretar las manchas solares, averiguar la forma en que se verifica el flujo de material bajo la corteza terrestre o incluso determinar la presión exacta requerida a fin de impulsar grandes volúmenes de agua a lo largo de extensas tuberías. Multitud de fenómenos concernientes a los procesos de turbulencia, como el despliegue de las nubes, se encuentran aún más allá de nuestra comprensión.

Mas, aunque no podamos anticipar todos los detalles, sí seremos capaces de realizar algunas predicciones si consideramos determina-

das situaciones como promedios estadísticos y partimos de la base de que la velocidad y la presión de las partículas son variables aleatorias. De esta forma, es posible aplicar la teoría de probabilidades y el cálculo estadístico, tomando el promedio de los sucesos y obteniendo descripciones matemáticas a partir de la media de los movimientos que tienen lugar en flujos que representan asimismo promedios.

El hecho de tratar estos fenómenos como sucesos aleatorios no debe inducirnos al error de creer que en realidad los mismos son debidos al azar. Una turbulencia está determinada por otras, y éstas a su vez dependen de otras distintas, y así sucesivamente, hasta retroceder a ciertas condiciones específicas iniciales. Pero nosotros aún no podemos describir dichas condiciones iniciales con la suficiente aproximación como para ser capaces de predecir todas sus consecuencias. En el proceso intervienen tantas variables interfirientes entre sí que nos vemos obligados a tratar las turbulencias resultantes como sucesos estocásticos: de esta forma describimos promedios, es decir, los casos que tienen mayor probabilidad de ocurrir.

El análisis de las turbulencias en términos de probabilidad revela algunos aspectos interesantes relacionados con los movimientos en remolino. Por ejemplo, un remolino de características medias se desplaza a lo largo de una distancia aproximadamente igual a su propio diámetro antes de generar remolinos más pequeños, que se mueven por lo general en dirección opuesta. Estos últimos dan lugar a nuevos remolinos aún más pequeños y el proceso continúa hasta que toda la energía se disipa en forma de calor debido al movimiento molecular. En 1941, A.N. Kolmogoroff fue el primero en proponer la idea de que la turbulencia genera una serie de remolinos relacionados de forma jerárquica entre sí, lo que inspiró los exactos y hermosos versos de L. F. Richardson:

«De los grandes remolinos nacen remolinos pequeños,  
que se alimentan de su velocidad,  
y de los pequeños brotan otros aún menores,  
y así sucesivamente según la viscosidad»

Utilizando el análisis estadístico, Kolmogoroff predijo también que la velocidad de un remolino es proporcional a la raíz cúbica de



su tamaño y que, por ejemplo, un remolino que se mueva con una velocidad doble que la de otro, será ocho veces mayor, o que uno que sea diez veces más rápido tendrá un tamaño mil veces superior.

### El número de Reynolds

Otro trabajo aún, de naturaleza teórica y estadística y debido a Werner Heisenberg, nos muestra por qué la densidad, la viscosidad y la anchura de la corriente desempeñan un papel destacado en el aspecto externo de una turbulencia, tal y como Osborne Reynolds había observado ya, aunque sin ser capaz de hallar una explicación para ello, hace aproximadamente noventa años. El descubrimiento de Reynolds, expresado matemáticamente en el parámetro denominado número de Reynolds, explica cómo los cuerpos pueden cambiar su forma en respuesta a cambios de escala, y al mismo tiempo, en una aparente contradicción, cómo fenómenos producidos en escalas diferentes pueden presentar la misma morfología. Examinemos esta idea.

Podemos llegar a comprender el concepto del número de Reynolds planteando cuatro sencillas cuestiones: 1) ¿Aumenta o disminuye la turbulencia cuando se incrementa la velocidad de la corriente?; 2) ¿Cómo varía dicha turbulencia cuando el tamaño de un obstáculo situado en plena corriente aumenta?; 3) ¿Crece o decrece la turbulencia al aumentar la densidad de la sustancia que constituye la corriente?; 4) ¿Cómo varía cuando se incrementa la viscosidad?

Las respuestas son, en su mayor parte, sencillas. Veamos: 1) La turbulencia aumenta cuando lo hace la velocidad. Una bandera ondea en mayor medida con viento fuerte que con una suave brisa. 2) La turbulencia se incrementa en proporción directa al tamaño del obstáculo, y así la estela creada por un barco mercante es mayor que la originada por un bote. 3) La turbulencia crece cuando aumenta la densidad de la sustancia que fluye. Cuanto mayor es la densidad, mayor es el número de partículas presentes en un determinado volumen, con lo que se incrementarán las interacciones de las mismas. 4) La turbulencia se amortigua cuando aumenta la viscosidad, la cual es una medida de la fricción interna de la corriente y está relacionada con el grado de cohesión de las partículas y la resistencia de las mis-

mas a ser separadas. Observando cómo el aire o el agua, cuya viscosidad es baja, adquieren con facilidad un régimen turbulento cuando rodean un obstáculo, en tanto que el aceite o las melazas, de viscosidad alta, fluyen suavemente en las mismas condiciones y no forman remolinos, comprobamos que la turbulencia es inversamente proporcional a la viscosidad: a mayor viscosidad, menor turbulencia.

Podemos expresar estos hechos en forma matemática diciendo que la turbulencia,  $T$ , es directamente proporcional a la velocidad,  $V$ , al tamaño del obstáculo,  $t$ , y a la densidad,  $D$ , e inversamente proporcional a la viscosidad,  $v$ . Es decir:

$$T \propto V \quad T \propto t \quad T \propto D \quad D \propto \frac{1}{v}$$

O, agrupando términos:

$$T \propto \frac{V \cdot t \cdot D}{v}$$

Podemos ir un poco más lejos, como hizo Reynolds, ya que, si elegimos las unidades de forma correcta, éstas pueden anularse, con lo que  $T$  se convierte en un número adimensional, conocido como número de Reynolds, con lo que tenemos:

$$R = \frac{V \cdot t \cdot D}{v}$$

La utilidad de esta fórmula estriba en el hecho de que flujos con idéntico número de Reynolds se asemejan entre sí, mientras que aquellos que difieren en este parámetro lo hacen asimismo en su aspecto y características. Podemos combinar diferentes velocidades, tamaños de los obstáculos, densidades y viscosidades en distinta forma, pero si obtenemos el mismo número de Reynolds para ellos, su apariencia general será la misma. Así, por ejemplo, si la corriente de un arroyo de flujo rápido es obstruida por un guijarro u otra de flujo lento lo es por un canto rodado, el modelo de la contracorriente que se produce es idéntico. Una mota de polvo cae en el aire con tanta



dificultad como la que experimentarían nuestros cuerpos moviéndose en un medio formado por melazas. Estos casos de similitud dinámica resultan de gran interés para el ingeniero, que diseña pruebas con modelos a escala para predecir el comportamiento de las estructuras de tamaño real. En estas pruebas, se confrontan las distintas variables como velocidad, tamaño, densidad y viscosidad entre sí en formas diferentes, pero si el resultado obtenido es el mismo, con un número de Reynolds idéntico y el mismo grado de turbulencia, entonces los flujos son más o menos equivalentes.

En lo relativo a los obstáculos, vemos cómo un cambio en el tamaño de los mismos supone una alteración en el patrón o forma del flujo. Cuerpos pequeños ocasionan débiles perturbaciones, en tanto que objetos grandes originan estelas turbulentas. En lugar de considerar el tamaño de una obstrucción, podemos también tener en cuenta la anchura de la conducción por la que fluye la corriente que queremos estudiar. Mientras que un escollo grande interrumpe el flujo directamente, una conducción amplia hace que sea el propio flujo el que se obstaculice a sí mismo y acabe interrumpiéndose, ya que posee un espacio mayor para que se produzcan las turbulencias y éstas se generan en mayor cantidad. De hecho, pueden obtenerse números de Reynolds basados en los diámetros de las conducciones de la misma manera que pueden generarse sobre la base del diámetro de las obstrucciones. En ambos casos, el modelo de flujo varía con el tamaño.

Recordemos, sin embargo, que el descenso de la velocidad o la densidad, o el incremento de la viscosidad, pueden compensar el efecto del aumento de tamaño, lo que explica por qué presentan similitudes tan grandes flujos que se producen a escalas muy diferentes. Al modificar sólo una determinada variable, cambia la apariencia, pero si se alteran dos o más a la vez, el aspecto del flujo quizá no resulte afectado. El principio de compensación entre variables explica la razón por la cual descubrimos modelos similares en escalas muy distintas.

Un último punto merece ser comentado en relación con la escala y la turbulencia. La turbulencia, o su medida (el número de Reynolds), es propiamente una expresión de cantidad o de tamaño, una forma de valorar la cantidad de materia presente en un determinado

fluido. Si consideramos el flujo de una conducción, observamos que tanto el incremento de la velocidad del flujo, como del tamaño de la conducción o de la densidad son tan sólo tres medios distintos de obtener una mayor cantidad de materia que interaccione consigo misma.

### La turbulencia en el Universo

No es ninguna coincidencia que la leche derramada en el fregadero imite el diseño de las galaxias en el espacio (fig. 37). La diferencia de velocidad, densidades y viscosidades compensa la enorme divergencia de magnitud existente entre el fregadero de la cocina y el firmamento, de forma que tanto la leche vertida como la Vía Láctea siguen un plan similar.

A modo de ilustración, la figura 37 muestra cuatro pares de fotografías. Excepto en la figura 37e, donde el material que forma el remolino está constituido por una mezcla de glicerina, partículas coloreadas y tinta, el primer elemento de cada pareja de figuras representa una cierta cantidad de leche que ha sido derramada en una pila de color pizarra. El área por la que se extiende la leche es tan sólo de unos pocos centímetros, mientras que las nubes de gases, las galaxias espirales y la expansiva nebulosa del Cangrejo que aparecen en las fotos de la derecha cubren superficies del orden de varios trillones de kilómetros ( $16^{19}$ ).

Kant y Laplace fueron los primeros que describieron la turbulencia de la materia estelar, de la que constituye una excelente y bella representación visual la pintura *Noche estrellada* de Van Gogh, un fragmento de la cual se muestra en la figura 38. Por su parte, Carl von Weizsäcker y George Gamow han intentado explicar la naturaleza física de este fenómeno.

En los primeros estadios del desarrollo del Universo, el material que constituía éste estaría integrado por partículas nucleares gaseosas. Este gas era necesariamente turbulento, es decir, poseía un número de Reynolds elevado, debido a que fluía sin restricción alguna, a no ser los límites del propio Universo, y su turbulencia dio lugar a compresiones locales y rarefacciones. Una vez comprimidas las partículas gaseosas, la atracción gravitatoria entre ellas se incrementaría,



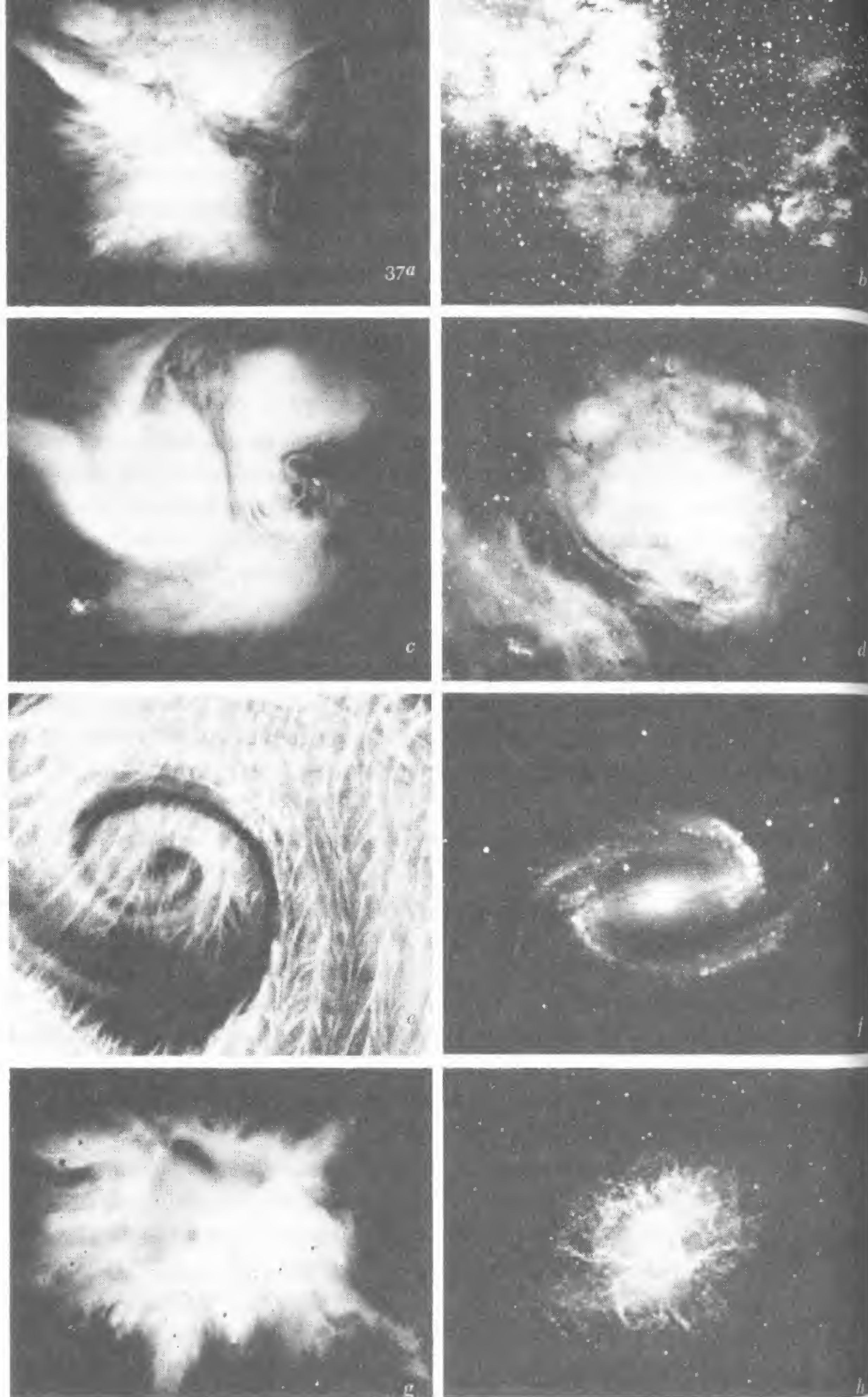


Fig. 38

ya que dicha atracción varía, como ya sabemos, en relación inversa con el cuadrado de la distancia que separa las partículas. De esta forma, muchos de los grupos sometidos a la acción de compresión no podrían expandirse de nuevo y serían retenidos por su propia fuerza gravitatoria. Es interesante señalar que masas semejantes de gas se producen continuamente como consecuencia de la turbulencia del aire que nos rodea, pero dado que su tamaño es demasiado reducido no experimentan la influencia anteriormente indicada de sus propias fuerzas gravitatorias. En el gas que constituía originariamente el Universo, sin embargo, las nubes alcanzarían enormes dimensiones, con masas equivalentes a varios millones de veces la masa solar. Con semejantes magnitudes, la atracción gravitatoria, incrementada, haría que las partículas se aproximaran aún más entre sí, lo que a su vez aumentaría la fuerza atractiva, reduciendo de nuevo la distancia entre las partículas. Así, una vez formada una masa gaseosa de tales proporciones, experimentaría un colapsamiento a causa de la creciente acción gravitatoria.

Si la nube gaseosa fuera muy grande, el colapsamiento se prolongaría indefinidamente reduciendo el tamaño de la nube a límites muy exigüos. En el momento actual, podrían existir en el Universo miles de millones de estas nubes colapsadas, los denominados «agujeros negros» que los astrónomos se afanan por descubrir, y cuyo nombre

◀ Fig. 37



se debe a que sus intensos campos gravitatorios impiden escapar cualquier clase de materia, incluidos los fotones de la luz. Por supuesto, no se trata de auténticos agujeros; más bien consisten en inmensas concentraciones de materia que atraen cuanto les rodea, incluyendo, como ya se ha dicho, la propia luz, por lo que no existe ningún medio de observarlos de forma directa. Así pues, su aspecto sería el de un vacío negro.

Qué ocurre en tales agujeros y cómo la materia consigue escapar a este colapsamiento continúan siendo dos de las cuestiones de más palpitante interés en la física moderna. Lo que suceda en un agujero negro puede servir para predecir el futuro del Universo entero: qué acontecimientos se producirán, cuándo tendrán lugar y si el colapsamiento ocurrirá antes del siguiente ciclo expansivo. De un modo u otro, según John Wheeler, la materia que se halla en el interior de un agujero negro tiene la posibilidad de asumir nuevas propiedades espaciales, de manera que podría iniciarse así un nuevo ciclo con una topología espacial diferente.

Cuando las nubes del gas nuclear originario son de pequeñas dimensiones, la contracción cesa en virtud de la acción de la fuerza centrífuga antes de alcanzar el estadio agujero negro. Los movimientos aleatorios dentro de la pequeña nube determinan inevitablemente la rotación de ésta y hacen que se comporte como un remolino. Cuanto más intensa sea la contracción, más rápido será el giro, de forma análoga a lo que ocurre cuando un patinador que rota sobre sí mismo con los brazos extendidos recoge éstos y los pega contra su cuerpo. El incremento del movimiento de rotación trae consigo un aumento en la intensidad de la fuerza centrífuga, que tiende a proyectar materia hacia el exterior, de forma que en el plano de rotación el material desplazado del centro se dispone en largos brazos espirales. Sin embargo, perpendicularmente al plano de rotación, la materia se mueve aún hacia el interior y continúa colapsándose, debido a lo cual el sistema sufre un aplanamiento hasta quedar convertido en la familiar forma discoidal que presenta una galaxia espiral.

El mecanismo que mantiene desplegados los brazos espirales de la galaxia y que impide su repliegue no se conoce aún completamente. Como analogía, cabe considerar el movimiento de un aspersor que proyecta chorros espirales de agua al regar. De forma similar, en

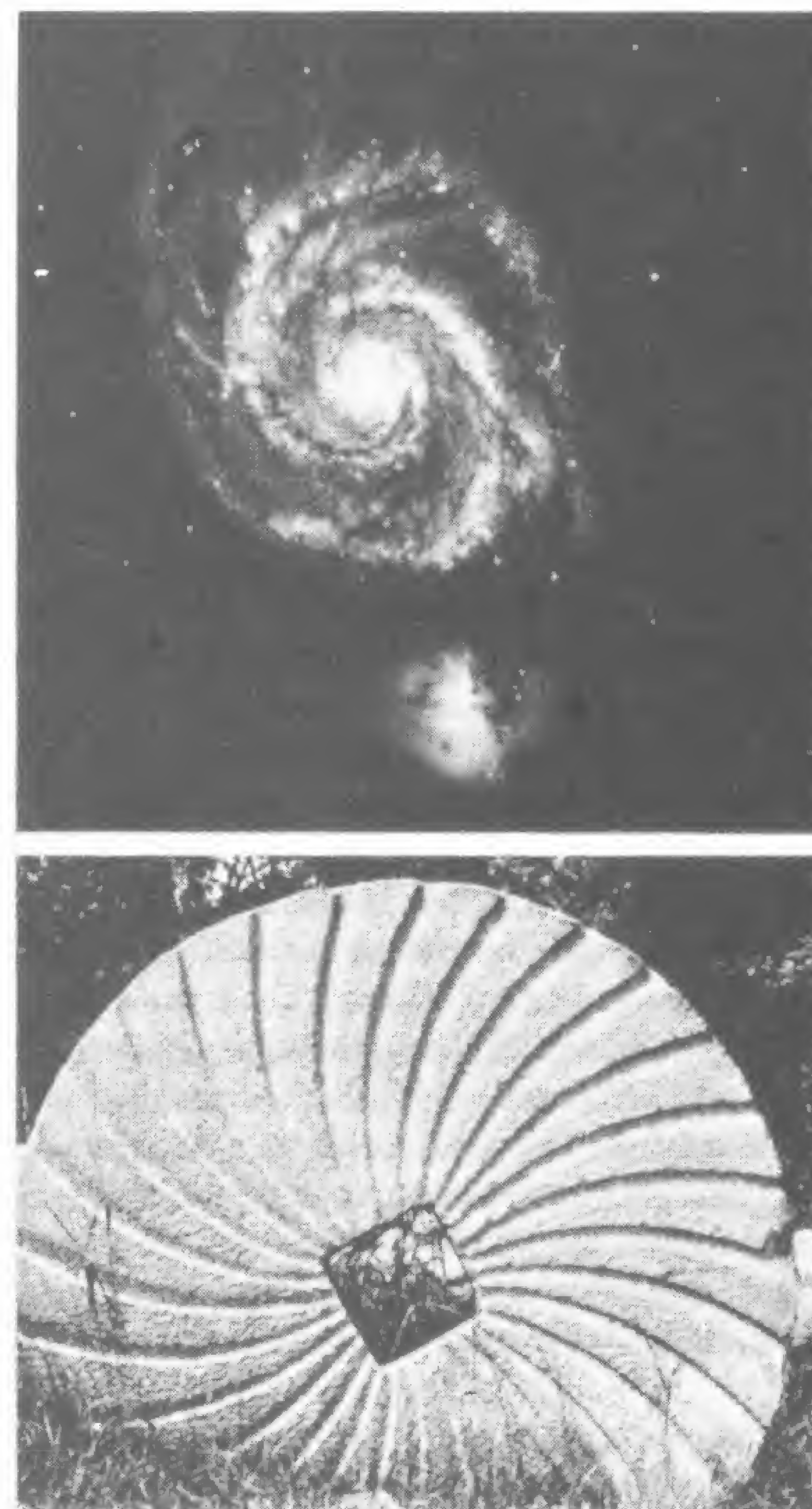


Fig. 39



una galaxia los brazos se forman por proyección de materia hacia el exterior, y dicha materia penetra en el sistema desde arriba y abajo del disco en rotación.

La figura 39 muestra otra analogía de la galaxia espiral: una vieja piedra de molino con surcos espirales que, a medida que tiene lugar la revolución de la piedra, llevan el grano molido desde el centro hacia afuera.

Cuando las nubes de gas giran lentamente, no proyectan al exterior parte de su materia para formar brazos en espiral, sino que continúan presentando un aspecto homogéneo y uniforme, y su colapsamiento origina galaxias elípticas.

Una teoría similar, basada en la turbulencia y la rotación, explica la formación del sistema solar. Laplace supuso que el Sol y los planetas que lo rodean se condensaron a partir de una gran nube gaseosa en revolución. En la actualidad se postula que en el proceso intervinieron tanto condensaciones de gases como acumulaciones de polvo cósmico. Las partículas de polvo podrían haber sido agrupadas incidentalmente por la acción de la presión de la luz estelar, fuerza que varía también en relación inversa con el cuadrado de la distancia de separación de las partículas. Según las teorías modernas, flujos de gases y polvo habrían dado lugar a la formación de turbulencias y remolinos, los cuales entrarían en conflicto entre sí y se anularían recíprocamente, excepto aquellos que permanecieran libres de colisiones. Como era previsible, las turbulencias que subsistieron, las que no experimentaron colisiones, se hallaban espaciadas a intervalos regulares entre sí y, al condensarse, originaron los planetas, de forma que éstos también presentan un espaciamiento regular. Los detalles de esta teoría explican así la razón por la cual cada planeta del sistema solar se halla situado a una distancia del Sol que equivale aproximadamente al doble de la que separa al planeta que le precede de dicha estrella.

En este relato de la creación de los planetas vemos en acción una especie de teoría evolucionista. Observamos cómo los peor adaptados desaparecen (en este caso, los remolinos que colisionan entre sí), en tanto que los más aptos sobreviven (aquellos remolinos cuya posición original permitió que se mantuvieran libres de toda colisión). El resultado final es una ordenación regular que parece más el producto

de un diseño previamente elaborado que la acción del azar: el orden surge del caos. Sin embargo, es preciso observar que el caos persiste. De hecho, si consideramos el calor generado y disipado en las colisiones de los remolinos formados y en la condensación del polvo y el gas necesario para dar lugar a los planetas, vemos que efectivamente el desorden en entropía del sistema se ha incrementado. El orden de los acontecimientos locales (en nuestro caso, el espaciamiento de los planetas) resulta compensado con creces por el desorden (el calor generado) en el resto del sistema (el Universo).

### Estelas de vórtices

Cuando consideramos flujos con números de Reynolds bajos, observamos de forma aún más directa la producción de un orden a gran escala: los remolinos se alternan entre sí y forman filas regulares. Tales flujos no son realmente turbulentos ni estables, sino más bien periódicos.

A menudo vemos cómo detrás de una roca situada en medio de un arroyo o al bogar con la pala de la canoa se originan pares de remolinos que giran en sentido opuesto. También comprobamos cómo detrás de un gran obstáculo en la corriente, como puede ser el estribo de un puente en un río de curso rápido, dichos pares de remolinos desaparecen de una manera rítmica y fluyen corriente abajo, primero desde uno de los márgenes y luego desde el otro. La figura 40 muestra una corriente alternativa de vórtices en un flujo de aire en el cual se han esparcido gotitas grasas mediante un aerosol. El aire fluye alrededor de un cable estacionario y produce el modelo periódico denominado estela de vórtices. El vórtice de uno de los lados del cable crece hasta atraer materia, a través de la estela que forma, desde el lado opuesto del cable. Este flujo de materia, que gira en dirección contraria, se incrementa hasta que atrae a su vez partículas materiales del lado opuesto al mismo. Tal incremento tiene lugar periódicamente, primero en uno de los lados del cable y después en el otro. Obsérvese cómo los remolinos formados en la fila inferior giran en sentido contrario a las agujas del reloj, mientras que los de la fila superior lo hacen según el sentido de las agujas del reloj. En los puntos en que unos y otro se entremezclan, en el centro, los remolinos se entrelazan



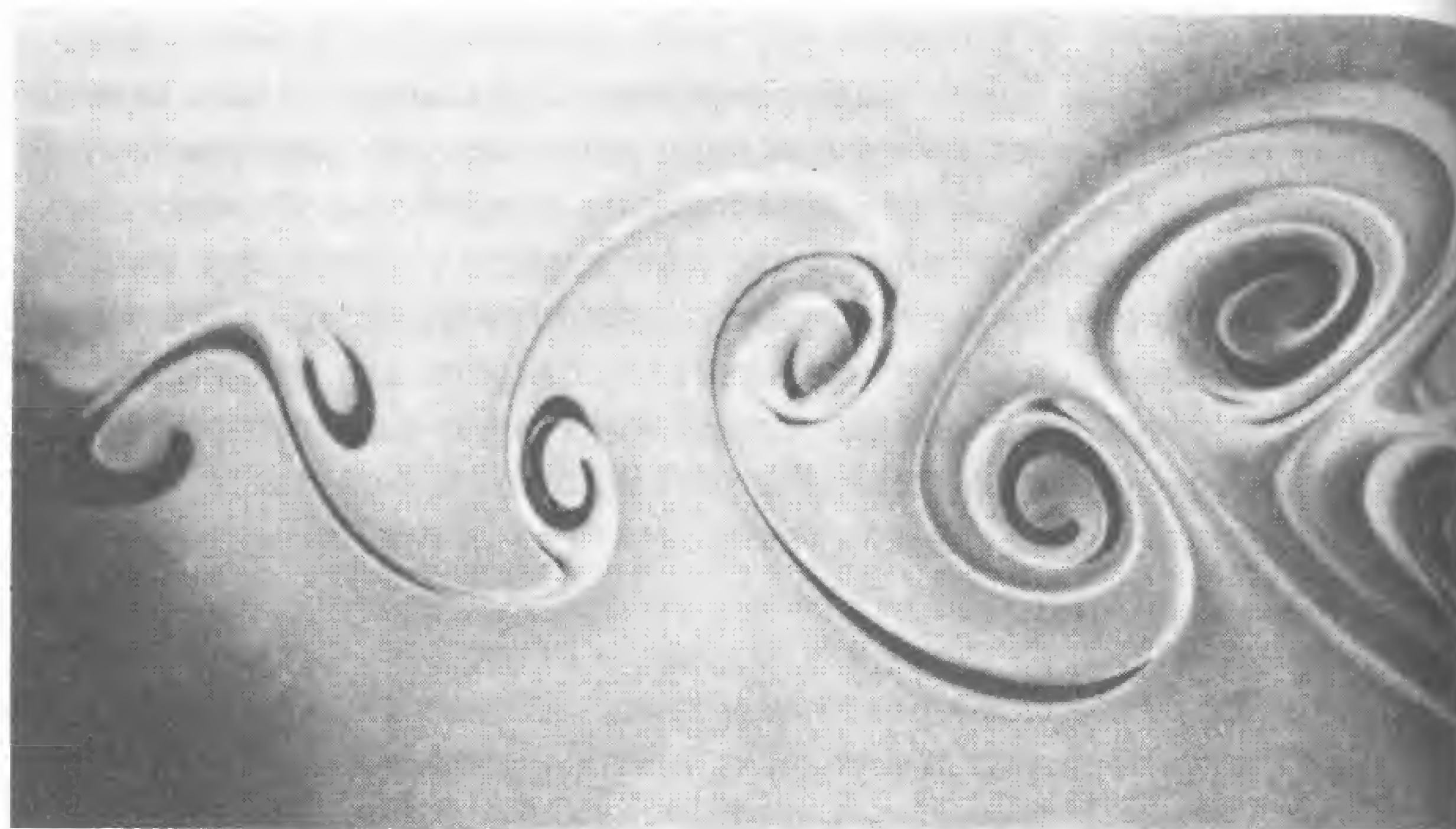


Fig. 40

de forma similar a como lo hacen los engranajes de una máquina.

Se ha sugerido que la natación en los peces, quienes generan sus propios remolinos, puede sacar partido de las rotaciones de éstos, de forma que el movimiento resultante sería similar al de una cinta desplazándose entre rodillos (fig. 41a). Recientemente, sin embargo, Heinrich Hertel ha determinado, al menos en el caso de la natación de las serpientes, que dos filas de vórtices se deslizan sobre una única línea y que el cuerpo del animal corta cada vórtice por su centro en lugar de rodearlo (fig. 41b). No se forman nuevos remolinos detrás de la serpiente, es decir, no hay contracorriente. Asimismo, dichos remolinos permanecen donde se originaron y no se desplazan corriente abajo, lo que, unido a la carencia de estela, testifica la eficiencia del movimiento de natación de las serpientes.

Se ha apuntado asimismo la hipótesis de que las aves emigran en formaciones en V para sacar partido de cada uno de los remolinos y turbulencias generados por los distintos individuos de la formación. La reacción que se produce cuando cada ave desplaza hacia abajo con su batir de alas el aire situado bajo éstas, crea a su alrededor un impulso ascendente que puede ser aprovechado por otra ave que se

encuentre cerca de ella. Si el grupo completo vuela en V, todos los individuos comparten aproximadamente el mismo grado de impulso ascendente, ya que cada ave entra en el área del impulso generado por el individuo que le precede. El ave que encabeza la formación se beneficia también de este empuje, puesto que lo recibe de ambos lados, de sus compañeras que vuelan inmediatamente detrás. Cada individuo surca por tanto la estela que van dejando sus vecinos, y cálculos realizados revelan que un grupo de 25 aves pueden volar en formación un 70 % más lejos de lo que lo haría una ave sola.

El hombre, como las aves y las serpientes, también hace uso de los movimientos periódicos de flujo, aunque de una forma más bien inesperada: escuchándolos. Si los remolinos de una estela de vórtices se extinguen a partir del punto donde se halla el obstáculo con una frecuencia comprendida entre 50 y 20.000 hertzios, o ciclos por segundo, escuchamos sonidos melódicos y silbidos. Tanto las arpas eólicas, como las ramas de los árboles, los hilos telefónicos, las flautas, los tubos de un órgano o las teteras producen sonidos por vórtices desprendidos dentro de la gama de frecuencias audibles.

Las estelas de vórtices pueden también afectarnos en una escala mucho mayor. Así, sabemos que fueron vórtices regulares los responsables del hundimiento de los sistemas de suspensión del puente de Tacoma Narrows en 1940. Con un viento constante de 67 km/h soplando a través de una calzada de unos 11 m de anchura, se gene-

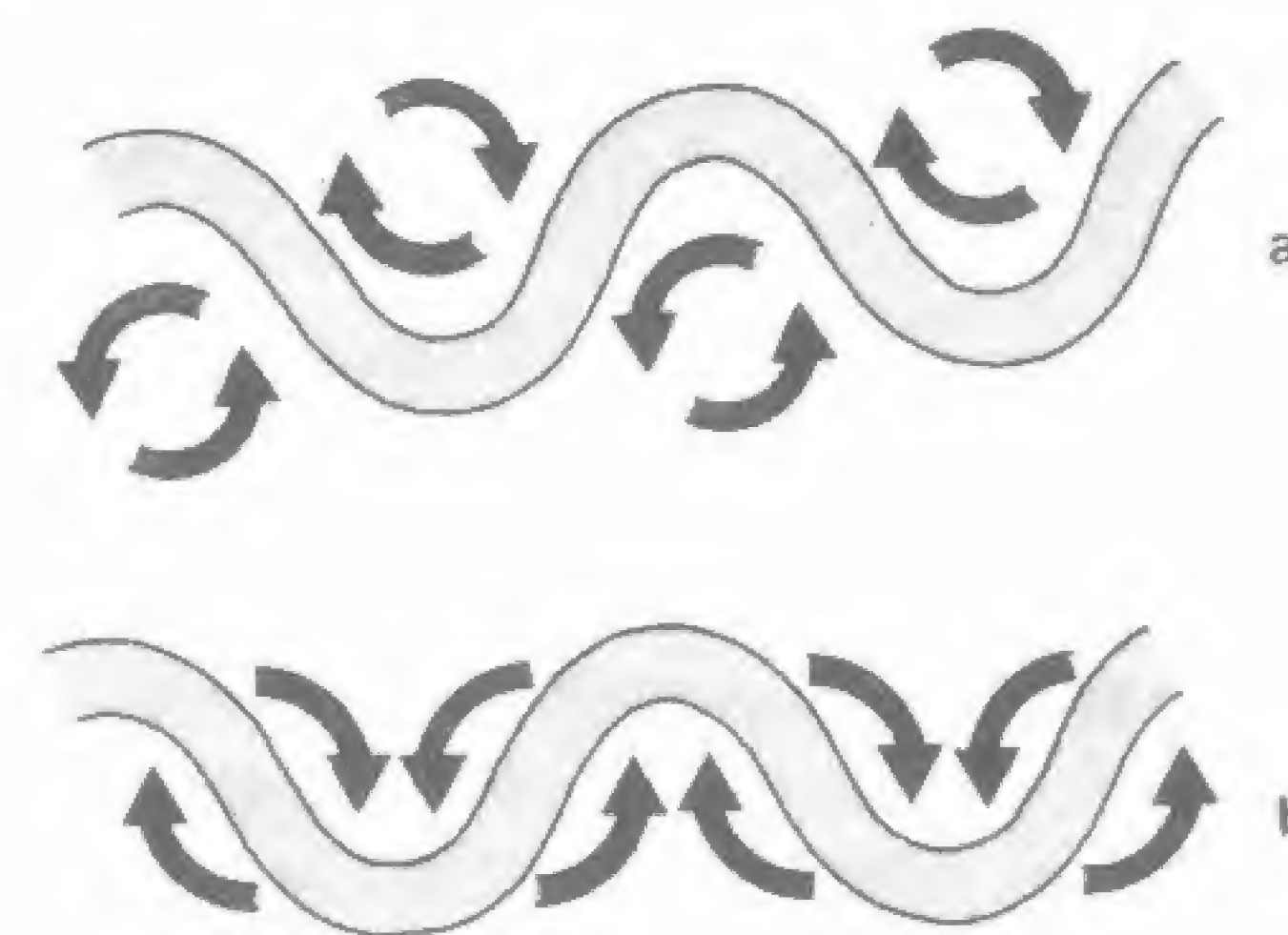


Fig. 41



raron vórtices en una de las márgenes y después en la otra que hicieron que el puente se retorciera sobre sí mismo, primero en un sentido y a continuación en el otro. Tras su hundimiento, el puente fue reconstruido con una sección transversal en forma de caja y no de H, de manera que resistiera mejor la torsión o el giro, y todas las superficies de la sección se realizaron a base de entramados abiertos con objeto de reducir el área expuesta al ataque del viento (lo que equivale a reducir el término correspondiente al área en la ecuación de Reynolds).

### Tensión y flujo

Para un número de Reynolds suficientemente bajo, el flujo no da lugar a turbulencias ni remolinos, sino que circula de manera uniforme alrededor de cualquier obstáculo interpuesto en su camino. La figura 42 muestra el modelo de flujo a baja velocidad alrededor de un perfil cilíndrico.

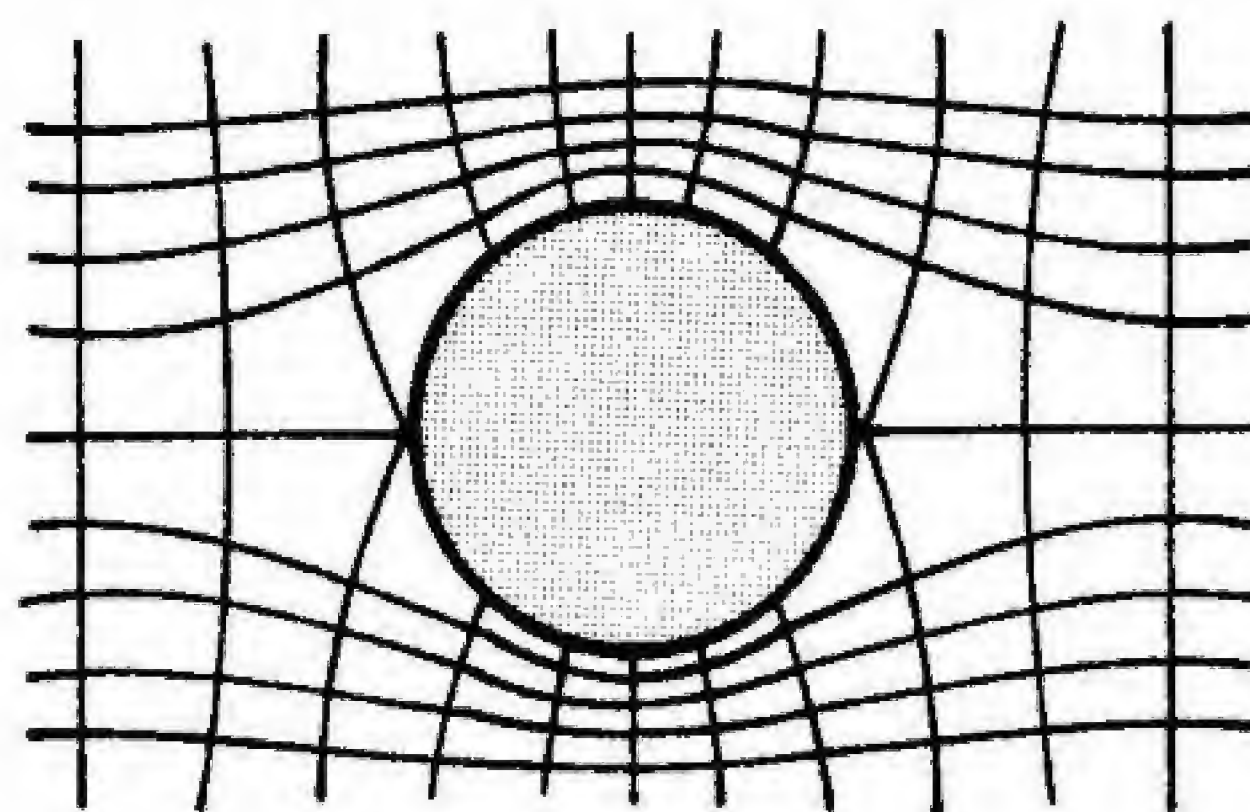


Fig. 42

Esta figura es muy notable, ya que representa en realidad tres fenómenos físicos enteramente diferentes. Además del flujo a baja velocidad antes mencionado, también es la representación de un dipolo en un campo eléctrico uniforme y de las líneas de tensión y compresión alrededor de una oquedad circular. Estos tres fenómenos son básicamente diferentes, pero presentan la misma configuración espacial.

Interpretando la figura en términos de flujo a baja velocidad (o más correctamente, de flujo irrotacional, en el cual el fluido no se adhiere contra la superficie del cilindro para producir turbulencias), las líneas horizontales representan líneas de corriente (trayectoria seguida por las partículas de agua o del tinte añadido a ésta para visualizar el recorrido). En aquellos puntos en los que las líneas de corriente se aproximan (en nuestra figura, en las regiones superior e inferior del cilindro), la velocidad es elevada, mientras que en las zonas en que se separan (a la izquierda y a la derecha en la figura), dicha velocidad decrece. Las líneas verticales que cortan en ángulo recto las líneas de corriente son equipotenciales. Éstas son difíciles de definir en términos físicos, pero, de forma análoga a los potenciales eléctricos, representan líneas a lo largo de las cuales la velocidad potencial no varía. En la dinámica de fluidos, sin embargo, adquieren mayor importancia las líneas de corriente.

Otro hecho referente a la dinámica de fluidos que nos ayudará a comprender la figura es que en el seno de una corriente podemos encontrar pequeñas fuentes y sumideros (lugares donde se incorpora fluido adicional o sale éste, respectivamente) y si desplazamos éstos hasta ponerlos casi en contacto, el fluido adicional surgirá y desaparecerá de nuevo sin ocasionar apenas perturbaciones al resto de la corriente. Si elegimos el tamaño de la fuente y del sumidero de forma correcta, y fijamos la distancia adecuada entre ellos, actuaremos exactamente como si hubiésemos dispuesto en la corriente un obstáculo cilíndrico. Por lo tanto, podemos imaginar el círculo de nuestra figura como si contuviera una fuente y un sumidero bidimensionales, en torno a los cuales pasan las líneas de corriente.

Consideremos ahora la figura de una forma distinta: como una representación de fuerzas eléctricas. En lugar de situar una fuente y un sumidero en el seno de un flujo uniforme, dispongamos dos pequeñas cargas, una positiva y otra negativa (lo que se denomina un dipolo eléctrico) en un campo eléctrico bidimensional uniforme: obtenemos exactamente la misma figura. Las líneas horizontales son líneas de fuerza eléctrica: cuanto más agrupadas se hallen, mayor intensidad tiene el campo. Las líneas verticales son, como en el caso anterior, equipotenciales. La cantidad de trabajo que se necesita para desplazar una carga eléctrica en el campo viene determinada por el



número de superficies equipotenciales que atraviesa dicha carga.

Pasemos de nuevo a un fenómeno distinto y supongamos ahora que tenemos una plancha de acero sujeta en sus extremos y sometida a una fuerza de estiramiento. Si la plancha posee un orificio circular, las líneas de tensión serán muy similares a las de la figura. Estas líneas, que irán de izquierda a derecha, serán de igual tensión, en tanto que las que se disponen de arriba abajo poseerán igual compresión. Allí donde las líneas se agrupen, las fuerzas de tensión o de compresión serán elevadas, y donde se separen, serán menores. Si la plancha se debilita, podrá llegar un momento en el que se parta, precisamente por la zona situada en la vertical que pasa por el centro del orificio, donde el agrupamiento de las líneas es más estrecho.

¿Cuál es la razón de que el mismo esquema describa fenómenos esencialmente diferentes?

Richard Feynman ha proporcionado la respuesta. Hablando acerca de la «unidad subyacente» de la Naturaleza, se refiere a la identidad existente entre las descripciones matemáticas del flujo irrotacional y del dipolo eléctrico en un campo uniforme, y muestra también cómo estos fenómenos son matemáticamente equivalentes a los problemas relacionados con el flujo de calor, el estiramiento de membranas, la difusión de los neutrones y la iluminación uniforme de una superficie plana. Más tarde afirma:

«La unidad subyacente podría significar que todo está constituido por la misma sustancia, y obedece por tanto a las mismas ecuaciones. Esta explicación suena bien, pero pensemos un poco. El potencial electrostático, la difusión de neutrones, el flujo de calor, ¿hacen referencia realmente al mismo tipo de sustancia? ¿Podemos pensar que el potencial electrostático es *físicamente* idéntico a la temperatura o a la densidad de las partículas?... El desplazamiento de una membrana no es desde luego lo mismo que la temperatura. ¿Cómo es posible por tanto que haya una unidad subyacente?...

¿Podría ser éste el indicio que buscamos? ¿Que aquello común a todos los fenómenos sea el *espacio*, que constituye el marco en el que se desarrolla la física? En la medida en que todos los cuerpos son razonablemente uniformes en el espacio, las cuestiones básicas que estarán implicadas en el problema harán referencia a las tasas de cambio cuantitativo con respecto a la posición en el espacio. Ésta es la razón por la cual siempre obtenemos en los cálculos una ecua-

ción con un gradiente... Lo que es común a todos nuestros problemas es que todos ellos implican un espacio...»

Volviendo a nuestra figura, encontramos que cada uno de los fenómenos que representa se caracteriza por alguna propiedad que varía en magnitud (a veces también en dirección) según la región del espacio que se considere. En el ejemplo del flujo de un fluido, las líneas de corriente cambian en magnitud y dirección; en el del dipolo, las líneas de fuerza lo hacen también en magnitud y dirección, y en el caso de la plancha sometida a tracción, las líneas de tensión y de compresión varían en magnitud. Aunque las líneas se refieran a fenómenos que no son idénticos, los cambios que experimentan sí lo son y tienen lugar de una forma gradual y continua.

Ahora consideremos la forma en que podemos reflejar estos cambios idénticos en nuestro diagrama. Para ello dividimos el campo o el espacio en diferentes partes y trazamos líneas que representan variaciones medias. Puede argüirse que seccionando el campo y tomando promedios perdemos la perspectiva de continuidad del fenómeno, mas cabe responder a ello que los cortes que establezcamos pueden ser tan pequeños como se quiera y que la dirección de la línea como manifestación visual del cambio compensa sobradamente cualquier pérdida introducida por la subdivisión efectuada en el campo.

El aspecto fundamental del asunto estriba en que cuando nos decidimos a representar un gradiente de variación continua por medio de líneas de fuerza, la cuestión de establecer cuántos gradientes diferentes pueden existir en el espacio se reduce a saber cuántos modelos distintos de líneas cuasiparalelas pueden ser trazados. La respuesta es: no muchos.

Nuestra figura muestra un modelo de líneas más o menos paralelas entre sí que han sido separadas. Es el diseño que se obtendría acuchillando un pañuelo de lino con un piolet. Las fibras se separan y «fluyen» alrededor del piolet. (La analogía no es exacta, ya que las líneas verticales, lo que podríamos denominar la urdimbre, no mantienen ángulos rectos con las horizontales, o trama, como se observa en la figura, a menos que unas y otras se conectaran directamente entre sí.)



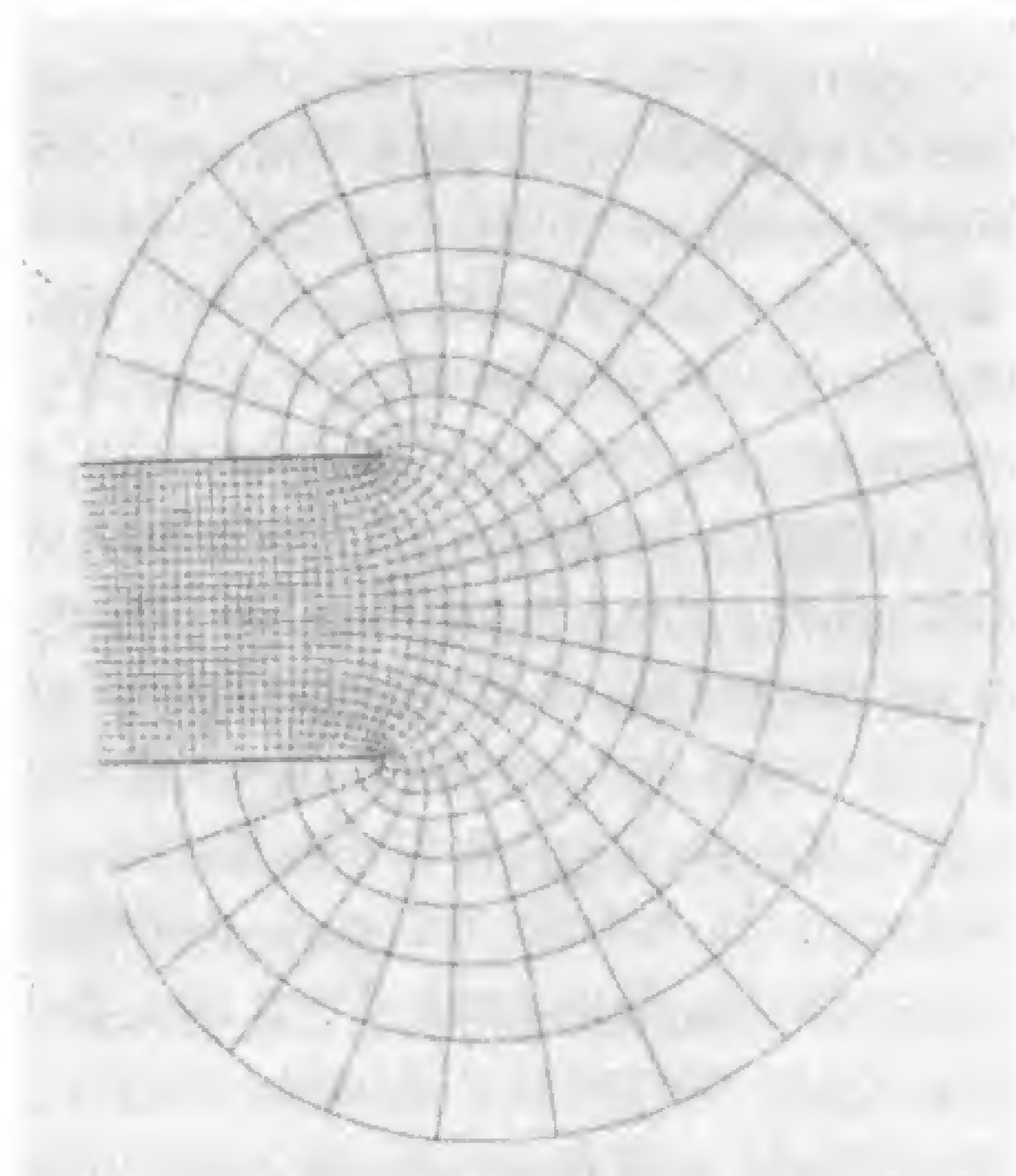


Fig. 43

Un diseño simple de líneas cuasiparalelas es el que forman las diferentes ramas atadas en haz que componen una escoba o, en el caso de los fenómenos eléctricos, las líneas equipotenciales y los polos de dos placas paralelas de carga opuesta. La figura 43 es una representación realizada por Clerk Maxwell de estas líneas equipotenciales. Las líneas de fuerza terminan en ángulos rectos en las placas y las equipotenciales discurren paralela y longitudinalmente a las mismas. Obsérvese cómo se asemeja este diseño al formado por un fluido del tipo de la melaza saliendo de un tubo.

El despliegue de las líneas puede ser, por supuesto, más irregular, como el de un bucle o rizo del cabello. Un ejemplo interesante se muestra en la figura 44, en la cual el capullo de una peonía ha sido seccionado con objeto de revelar los primeros estadios en el desarrollo de sus pétalos. ¿Cómo se las arregla este tejido, sometido a tantas turbulencias y repliegues, para dar lugar a una ordenación simétrica de los pétalos? ¿Qué factor hace que el brote, inicialmente macizo, comience el proceso de diferenciación? ¿Fuerzas de tensión? ¿Fuerzas eléctricas? ¿Alguna acción de tipo químico? Podría ser cual-

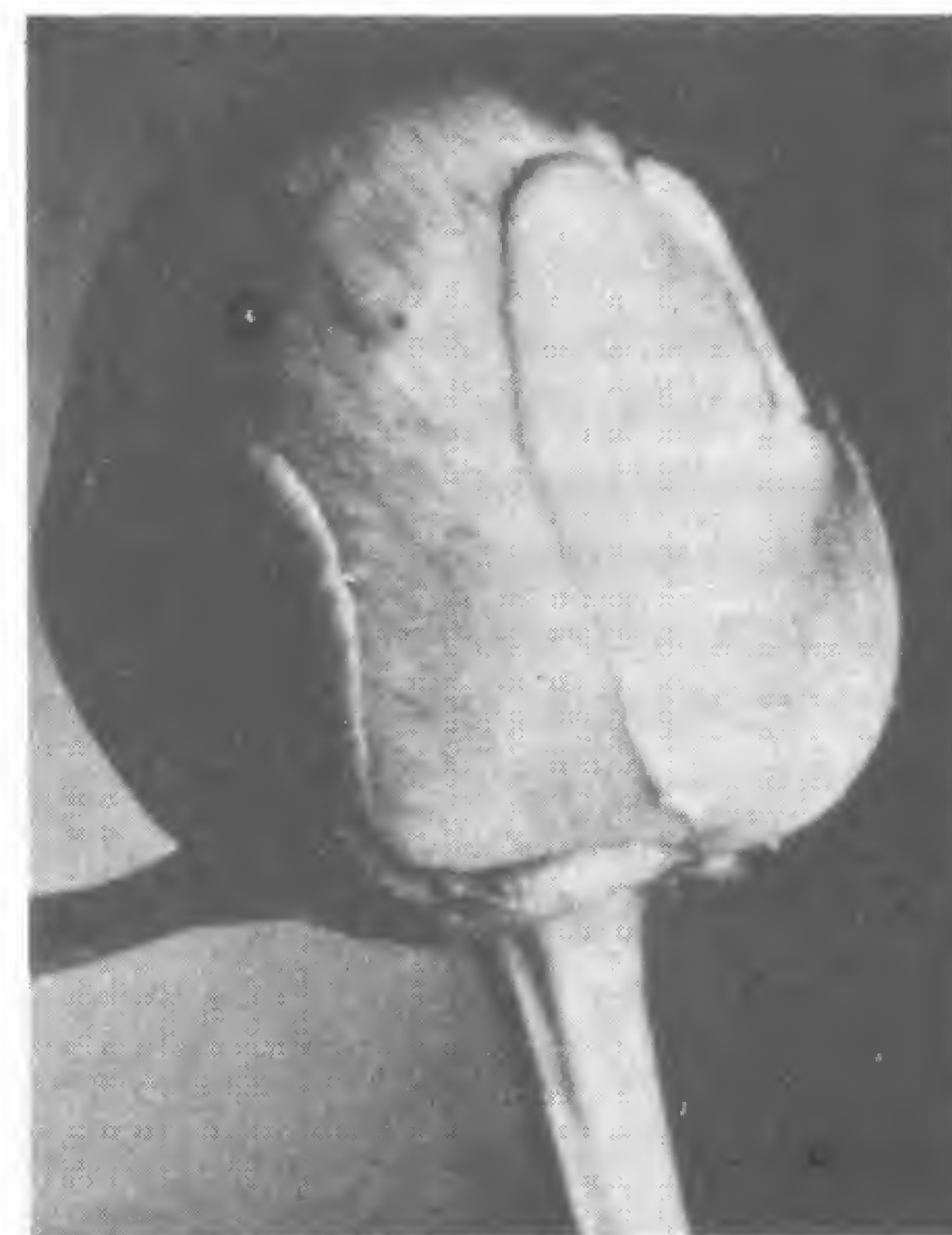


Fig. 44



quiera de ellas, o quizás otra distinta. El modelo, sin embargo, se basa en líneas de corriente irregulares.

Señalemos que la representación de las líneas de fuerza en el esquema de Maxwell de la figura 43 puede inducir a error, ya que muestra las líneas equipotenciales terminando en una línea de fuerza. En realidad, tanto éstas como aquéllas sólo pueden terminar en cargas, extenderse hasta el infinito o volver sobre sí mismas para formar circuitos cerrados. Estos circuitos son típicos de los mapas en los que se representan curvas de nivel, donde se emplean líneas cuasiparalelas para indicar las elevaciones del terreno. Las líneas que en ocasiones vemos formando ángulo recto con las de nivel son las de máxima pendiente. Estas representaciones se emplean para describir otros muchos gradientes, además de los relativos a la altitud. Así, la de la figura 45 muestra las variaciones de la fuerza gravitatoria y podría servir asimismo para representar variaciones de temperatura, precipitación, la densidad con que se agrupan las galaxias en el espacio u otros fenómenos que varían de forma continua. Allí donde las líneas se aproximan, la pendiente o la variación del parámetro en cuestión es brusca; donde se separan, el cambio es gradual. Si la variable no cambia de manera continua, sino que más bien lo hace a saltos y con brusquedad, las líneas se unen o se entrecruzan.

Excepto en el caso visto anteriormente del orificio en la plancha de acero, las líneas de las figuras 42 y 43 representan variaciones en dirección y magnitud (los gradientes son vectores más que magnitudes escalares), mientras que en la figura 45 representan cambios es-

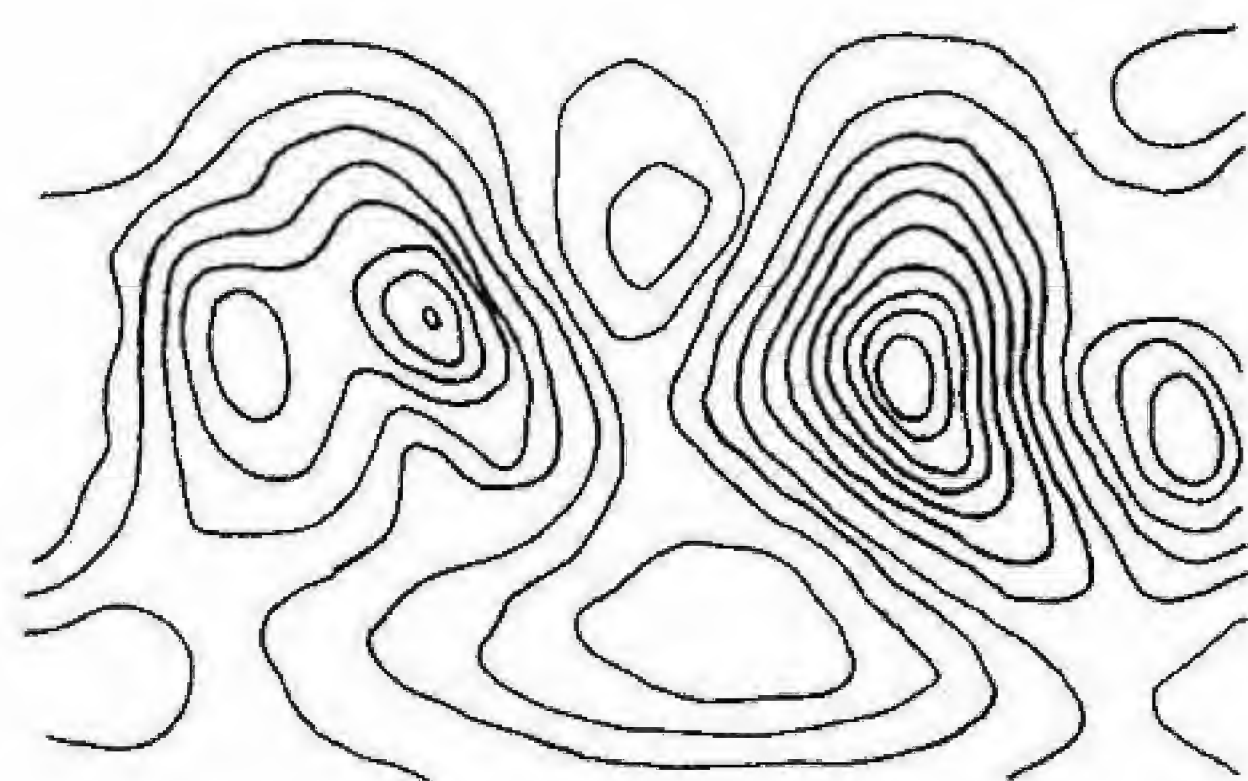


Fig. 45

paciales por medio de líneas cuasiparalelas. Lo más destacado es que tanto las pendientes como cualquier otro tipo de gradiente se hallan constreñidos, al igual que los modelos de líneas cuasiparalelas, de manera que uno refleja al otro.

De esta forma, nuestros haces de líneas pueden fluir rodeando cualquier obstáculo que se interponga en su camino, así como divergir o converger, extenderse hasta el infinito y cerrarse sobre sí mismos para formar bucles. Y, por supuesto, pueden asimismo realizar todas las variaciones posibles de estas ordenaciones, tal y como los artistas contemporáneos han puesto de manifiesto. Pero las variaciones son limitadas y se reducen a unos pocos tipos básicos, al igual que ocurre con los modelos de fuerza y las expresiones matemáticas que describen.

### Fuerzas de tensión en la madera y en los huesos

Las analogías entre los diseños de líneas de corriente en líquidos que fluyen y los correspondientes a las fuerzas de tensión en los sólidos explican una de esas cuestiones que nos encontramos con frecuencia cuando estudiamos las formas naturales y que nos sumen en la perplejidad. ¿Por qué la madera, como se muestra en las fotografías de la figura 46, parece turbulenta? ¿Acaso fluye como un líquido? ¿Están producidas las turbulencias en ella por la acción de corrientes? La respuesta es: no. La madera simplemente crece a lo largo de las líneas de tensión, y es ésta la que podríamos decir que «fluye».

En este apartado, veremos algunos modelos de tensión, y analizaremos a continuación lo poco que se conoce sobre los mecanismos de crecimiento que permiten que el material se deposite para formar estos diseños.

Para entender cómo se distribuyen las fuerzas de tensión, debemos volver al diagrama de la figura 18, en el que estudiábamos el combamiento producido en una barra. La parte inferior de la barra se alarga por efecto de la tensión, en tanto que la parte superior se acorta en virtud de la compresión a que es sometida. En la figura 47 se representa una barra similar, pero en lugar de soportar una única carga en el centro, soporta una serie de cargas distribuidas uniformemente a todo lo largo de ella. La figura muestra las trayectorias de



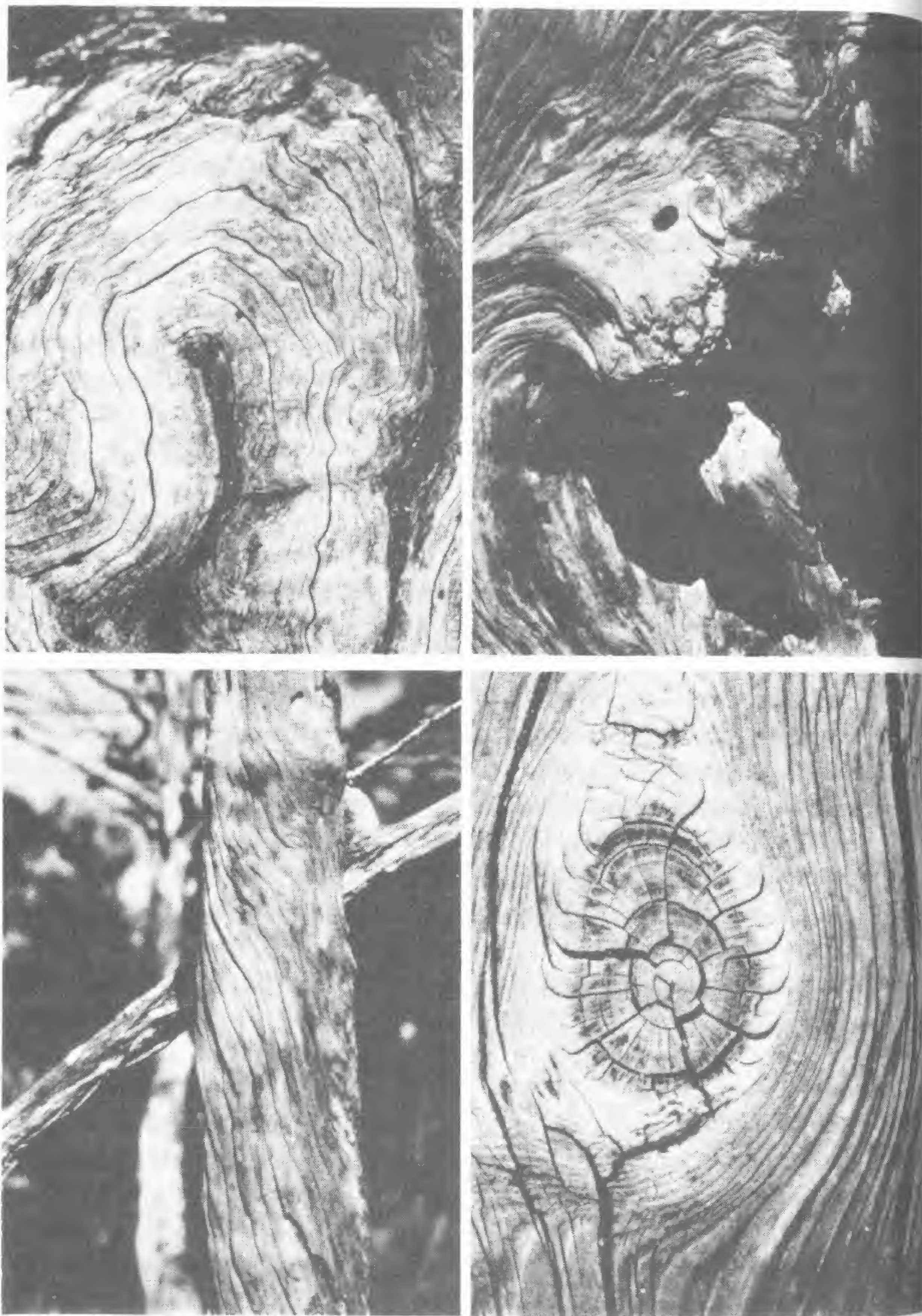


Fig. 46

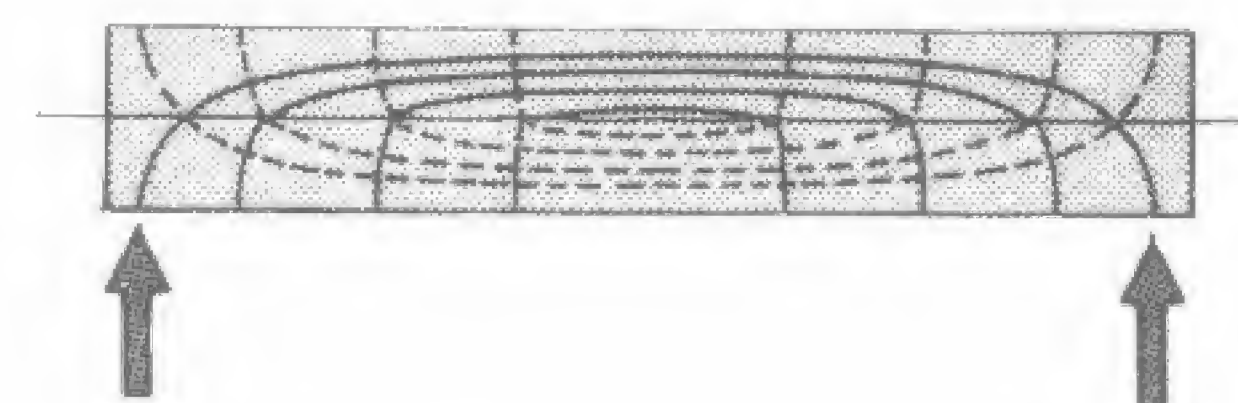


Fig. 47

las fuerzas de tensión dentro de la propia barra. Las líneas de puntos representan trayectorias de tensión, y las líneas continuas, de compresión. Vemos, al menos en la región central, cómo las líneas de tensión se agrupan en la parte inferior, en tanto que, como cabía esperar, las de compresión lo hacen en la parte superior (en el primer caso se experimenta un alargamiento y en el segundo una compresión). El agrupamiento de las líneas indica que las fuerzas de tensión poseen particular intensidad en el centro de la barra, lo que también era previsible, ya que las vigas o columnas ceden la mayoría de las veces en su punto medio.

Además, el diagrama revela que los puntos en los que las trayectorias de tensión y de compresión se cruzan se sitúan en una línea que discurre longitudinalmente por el centro de la barra. A lo largo de esta línea, denominada fibra neutra, las fuerzas de tensión y las de compresión se anulan, y el efecto sobre dicha fibra es nulo. De esta forma vemos la razón por la cual una estructura tubular puede reducir fácilmente su peso, y hacer posible que su tamaño se incremente, cediendo material de su zona central, de la fibra neutra. Por consiguiente, la pluma hueca, las cañas y los tallos de las gramíneas tienen aproximadamente la misma resistencia que si fueran sólidas.

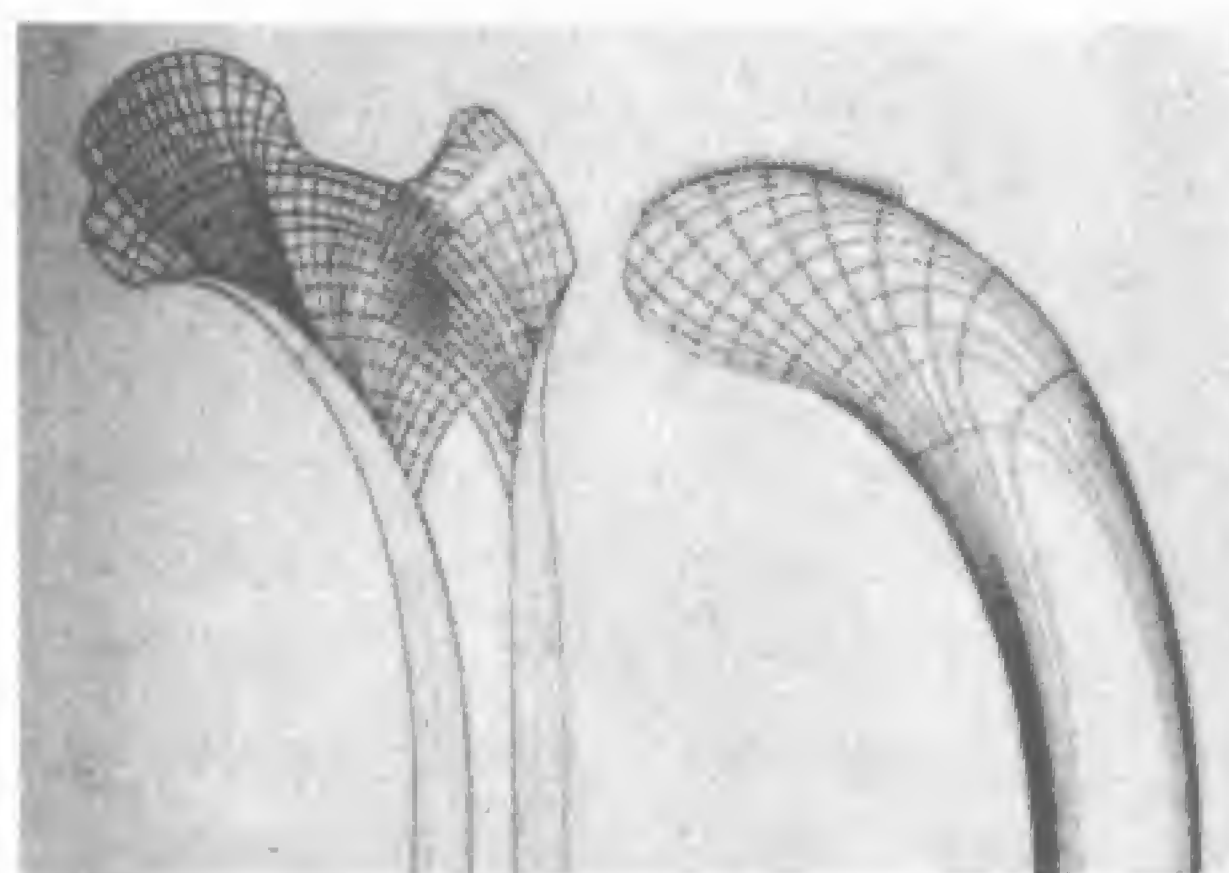
Sin embargo, junto con el interior hueco, cabría suponer también que existiera un espesamiento en el lado de la pared de la región media de una barra o tubo donde las fuerzas de tensión fueran más acusadas, y, en efecto, el fémur humano muestra dicho espesamiento o reforzamiento. Como puede verse en la figura 48, este hueso es básicamente un tubo hueco y se ensancha en sus partes inferior y superior para soportar las cargas procedentes de la pelvis y de la rodilla. La tendencia a combarse y deformarse resulta contrarrestada por el





Fig. 48

Fig. 49



engrosamiento de sus paredes en la parte central de su trayecto, justo donde las trayectorias de tensión se agrupan.

El examen de la cabeza del fémur confirma el hecho de que realmente se forma nuevo hueso a lo largo de las líneas de tensión. La figura 49 (de Thompson, 1942, según Culmann y Wolff) representa la conocida comparación de la cabeza del fémur y el extremo superior del mástil de la grúa de Fairbairn. D'Arcy Thompson relata que, cuando Karl Culmann, el gran ingeniero alemán, se hallaba ocupado en diseñar una grúa parecida, vio por casualidad un hueso de forma similar en la sala de disecciones de Hermann Meyer y comprobó que la ordenación de las trabéculas óseas constituía ni más ni menos que un diagrama de líneas de tensión, o direcciones de tensión y compresión en una estructura sometida a la acción de determinadas cargas: en pocas palabras, que la Naturaleza había reforzado el hueso precisamente de la forma y en la dirección requeridas; y dice que gritó: «¡Es mi grúa!»

De la figura se desprende que el modelo de las fuerzas de tensión es más complejo en el caso del hueso que en el de la grúa, ya que la cabeza de aquél presenta una concavidad, pero la analogía entre

ambos es obvia y tanto uno como otra son únicamente variaciones complejas del patrón de trayectorias que podemos apreciar en el extremo de la barra de la figura 47. Obsérvese de nuevo cómo en el hueso las paredes laterales reciben las líneas de tensión precisamente en los puntos en que se encuentran más consolidadas.

El diseño del hueso parece maravillosamente apropiado para la tarea que realiza: es grueso allí donde las tensiones son elevadas y fino donde éstas son bajas. Pero ¿cómo surge este diseño? ¿Cómo se realiza y toma forma? El mecanismo no está elucidado del todo, pero presumiblemente las fuerzas de tensión y de compresión activan cristales sensibles a la presión dentro del material en crecimiento, y dichos cristales generan campos eléctricos que determinan el alineamiento.



Fig. 50



miento de moléculas cargadas eléctricamente y de iones. Así, se produce la coincidencia de líneas de fuerza eléctrica similares en su comportamiento a las de tensión, y, por medio de estas fuerzas eléctricas, el material se deposita a lo largo de las líneas de tensión.

El control del crecimiento en las plantas es menos conocido, pero es posible que también tomen parte en el mismo fuerzas de tipo eléctrico. Como quiera que sea, las formas turbulentas son a menudo materializaciones de la tensión. En la figura 50 observamos unos cuantos pecioloos unidos aún al tallo de un filodendro y una serie de señales blanquecinas que señalan los puntos de inserción de otros pecioloos ya desprendidos. El puntito oscuro en el centro de dichas señales indica la posición del hueco central de los pecioloos tubulares. Esta cavidad central surge cuando el tejido foliar se pliega sobre sí mismo hasta formar un tubo. Debido a que el punto está situado sobre el centro de la señal, deducimos que el material de crecimiento se añade a la base, presumiblemente en respuesta a fuerzas de compresión, y sirve para sostener al propio peciolo. En la figura 51 vemos los haces de fibras que envuelven el tronco de la palma hindú (*Wallichia disticha*), fotografiada en el Fairchild Tropical Gardens de Miami (Florida). Sabemos por D'Arcy Thompson que esas fibras pueden desarrollarse también en respuesta a tensiones. Cuando el tronco se curva de un lado, las fibras del lado opuesto engruesan para mantener al árbol erguido.

### Tensión, flujo e ingeniería

Dado que las tensiones estructurales y las líneas de corriente de los fluidos presentan a menudo una ordenación espacial similar, no resulta sorprendente que las dificultades surgidas en el análisis matemático de complejas estructuras de ingeniería resulten ser análogas a las que plantea el estudio de los flujos o los regímenes turbulentos. Las estructuras simples, como los flujos sencillos, pueden ser descritas fácilmente. Una cáscara de huevo, por ejemplo, es sencilla de analizar, pero el caparazón de un cangrejo ya no lo es tanto.

Una forma compleja, como puede ser el caparazón de un cangrejo, presenta bordes serrados, superficies cubiertas de nervaduras y sutiles gradaciones de grosor. La Naturaleza engrosa aquellas áreas



Fig. 51



sometidas a una tensión alta, refuerza los espacios comprendidos entre las regiones superiores e inferiores (ver de nuevo el cangrejo bayoneta de la figura 19e) y mantiene finas como el papel las zonas que deben soportar tensiones bajas. Su respuesta a las líneas de fuerza es directa, sin proyectos ni cálculos matemáticos. El hombre, por el contrario, predice, calcula y cuantifica antes de construir, puesto que sus estructuras, en su mayor parte, son estáticas y no cambian. Una vez que una estructura construida por el hombre se yergue, los constructores desaparecen. No permanecen allí para efectuar continuas modificaciones en respuesta a cambios de temperatura, velocidad del viento o cargas dinámicas. El hombre ha de diseñar un modelo de la estructura que desea edificar utilizando materiales diversos como la madera o el metal, pero sobre todo haciendo uso de sus conocimientos matemáticos. Este modelo debe permitirle predecir de una forma muy precisa si la estructura resistirá o no. La dificultad estriba, sin embargo, en que no disponemos de una teoría matemática general aplicable a los caparzones y conchas orgánicas. Sólo podemos predecir el comportamiento de determinados casos particulares: conchas muy finas, sin apenas irregularidades ni cambios en su grosor, o aquellas que siguen un patrón geométrico muy simple, con formas circulares o paraboloides, en las cuales tanto la curvatura como la distribución de las cargas sean uniformes. Debido a nuestra necesidad de emplear las matemáticas, no podemos construir como lo hace la Naturaleza, modificando libremente las formas y añadiendo material allí donde sea necesario, sin atender a un diseño geométrico preconcebido. Las formas libres continúan estando en su mayor parte lejos de nuestro alcance. En muy pocos casos han podido los ingenieros y arquitectos eludir las restricciones del análisis matemático trabajando directamente con modelos confeccionados en alambre o plástico. La obra de Gaudí constituye el ejemplo clásico de construcción de modelos físicos de una forma orgánica (fig. 27a). Dentro de las construcciones más recientes, destaca el terminal de la TWA del aeropuerto John F. Kennedy de Nueva York, diseñado por Eero Saarinen (fig. 52).

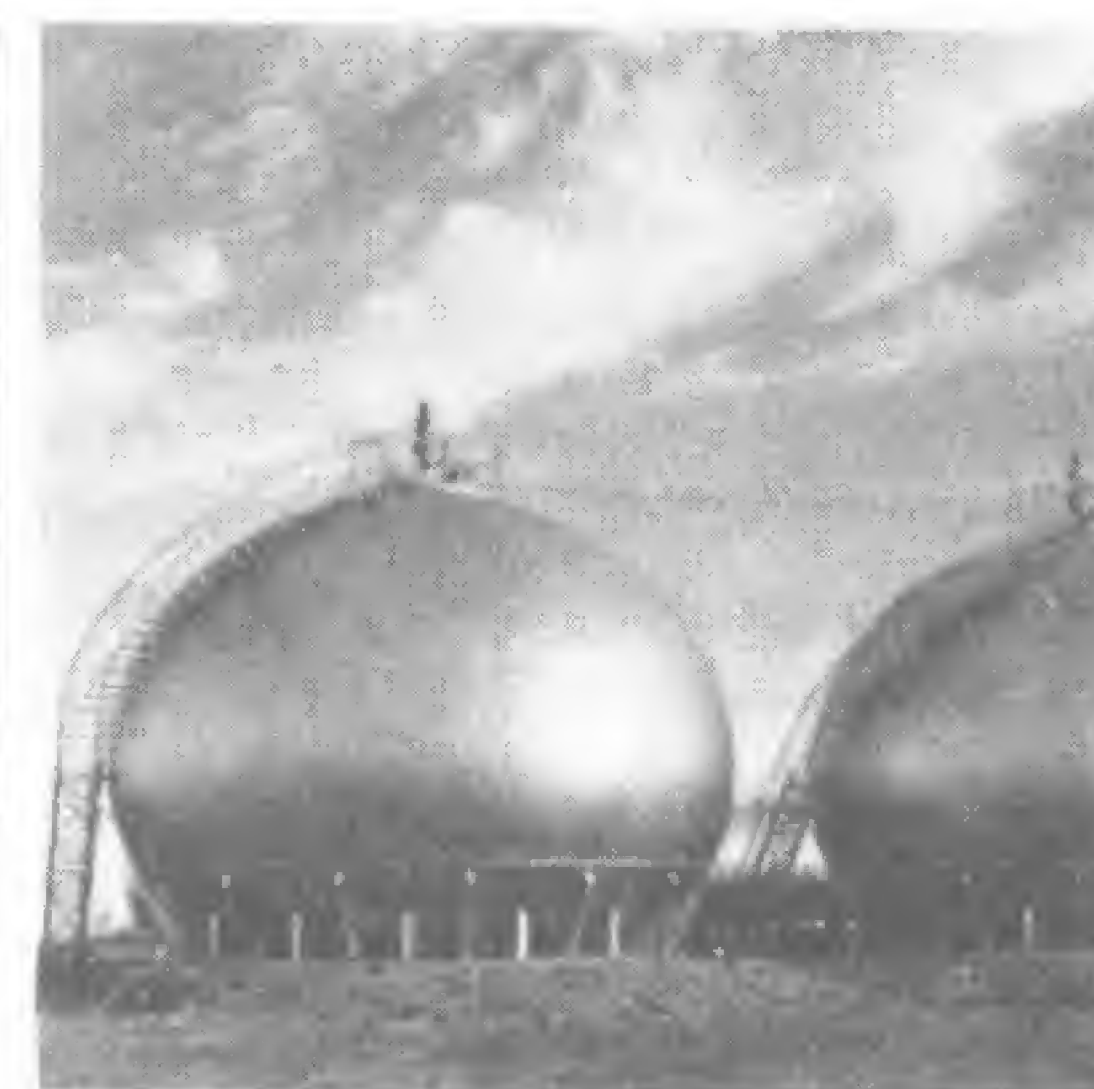
De cualquier forma, el análisis matemático está alcanzando cada vez mayores cotas, lo que conducirá a una sustitución progresiva de las formas sencillas, como esferas y cilindros, por diseños orgánicos



Fig. 52



Fig. 53





más complejos. Señalemos en este sentido el desarrollo de tanques de almacenamiento de líquidos, de aspecto ovalado, similares a gotas de agua o de mercurio distorsionadas por la acción de la gravedad (fig. 53). Una gota de agua mantiene su forma debido a la tensión superficial y, si se sitúa sobre una lámina horizontal de vidrio, el agua tiende a deprimirse como en una bolsa de hielo. La tensión superficial impide que se desparrame por completo sobre el cristal, pero la gota cambia su forma esférica característica por otra ovalada, resultado obtenido al estar sometidos todos los puntos de su superficie a la misma tensión. Este mismo principio se ha aplicado a los grandes tanques de almacenamiento y por ello el ingeniero ha renunciado, a la hora de diseñarlos, a la forma esférica, más sencilla de analizar y de fabricar, en favor de la forma ovalada, en la que la presión se distribuye uniformemente. A medida que nuestros modelos matemáticos y nuestras técnicas de fabricación se perfeccionen, cabrá esperar una mayor semejanza entre las formas naturales y las estructuras creadas por el hombre.

## 4. ESPIRALES, FORMAS SINUOSAS Y EXPLOSIONES

*«Bien, sí, el viento se levanta y sopla aquí a veces, en el oeste de Tejas. Puede venir de cualquier dirección, pero los vientos verdaderamente fuertes proceden aquí del norte o del sur, a no ser, como ocurre a menudo, que constituya un auténtico tiovivo que te envuelve por todos lados; y cuando esto sucede uno podría decir que las cosas se mueven.»*

Frank Neff

### Espirales

Los remolinos y tiovivos son, sin duda, algo fascinante. El remolino parece constituir un prototipo de cerramiento espacial: al envolverse a sí mismo crea un entorno resguardado y protegido, un espacio interior que difiere del medio externo de la corriente en movimiento. A menudo gira en contra de la corriente, debido a la acción de ésta al discurrir rápidamente hacia abajo. Su origen se debe a la obtención de energía de la corriente principal, con lo que se asemeja a los seres vivos, ya que también éstos hacen pagar a su entorno el precio correspondiente de su existencia. Mediante el mecanismo de la digestión los organismos disgregan la organización de otros seres vivos produciendo en el proceso un conjunto de residuos y fragmentos desordenados y caóticos. El Universo se deteriora con mayor rapidez debido a su existencia, pero, temporalmente, como fenómenos locales organizados que son, tanto los remolinos como los seres vivos viven y evolucionan moviéndose en contra de la corriente general.

Es también interesante destacar el hecho de que los remolinos se produzcan con tanta frecuencia por pares. Como sabemos, cada palada de remo que damos origina un par de vórtices, uno situado a la derecha y otro a la izquierda, y la estela de vórtices de Kármán ge-



nerada por cada silbido se alinea con los vórtices de ambos lados.

Las astas, colmillos y cornamentas de muchos animales también se presentan por pares y cada uno de los miembros del par supone una imagen especular del otro. Es como si dos corrientes de fluido viscoso circularan en perfecta simetría surgiendo de los orificios craneales (fig. 62). La excepción de esta regla la constituyen los cuernos únicos de los rinocerontes, situados en una posición central y que están formados por fibras queratinizadas aglutinadas y no por verdadero hueso o vaina córnea, y el colmillo del narval macho, que representa el desarrollo extremo del incisivo izquierdo y se ubica de forma asimétrica. Este colmillo crece en espiral hasta alcanzar 2,70 m y se utiliza como arma en los combates ritualizados que entablan los narvales machos en la época de celo, si bien carece de las propiedades afrodisiacas que la leyenda ha querido ver en él (pese a haber sido vendido durante siglos para tal fin por los buhoneros, en forma de polvos que según afirmaban procedían del propio unicornio). En algunos narvales, los dos incisivos se desarrollan y, lo que resulta en verdad extraño, ambos forman espirales en la misma dirección, es decir, que no constituyen imágenes especulares uno de otro. D'Arcy Thompson sugirió que la natación del animal podría determinar el movimiento de giro de sus defensas, pero ni él ni ningún otro investigador han podido probarlo.

Excepto en el caso de la defensa del narval, las espirales de sentido contrario al de las agujas del reloj que presentan las astas y los cuernos óseos de los animales se equilibran con las espirales de sentido opuesto. Incluso entre las hojas encontramos ocasionalmente la misma simetría: a los folíolos que giran en sentido contrario al de las agujas del reloj situados en el lado izquierdo de la hoja del sagú (figura 54) se oponen los del lado derecho, cuyo sentido de giro es el de dichas agujas. Este último es también el sentido en el que giran los ciclones por debajo del ecuador, en tanto que por encima del mismo lo hacen de forma opuesta. Y en un plano ya más abstracto, los números negativos se suceden a la izquierda del 0, mientras que los positivos lo hacen a su derecha en sentido creciente.

Los zarcillos trepadores de muchas plantas muestran asimismo un equilibrio entre las espiras opuestas. Como aparece en la figura 55a, las espiras del zarcillo se mueven hacia afuera desde el tallo

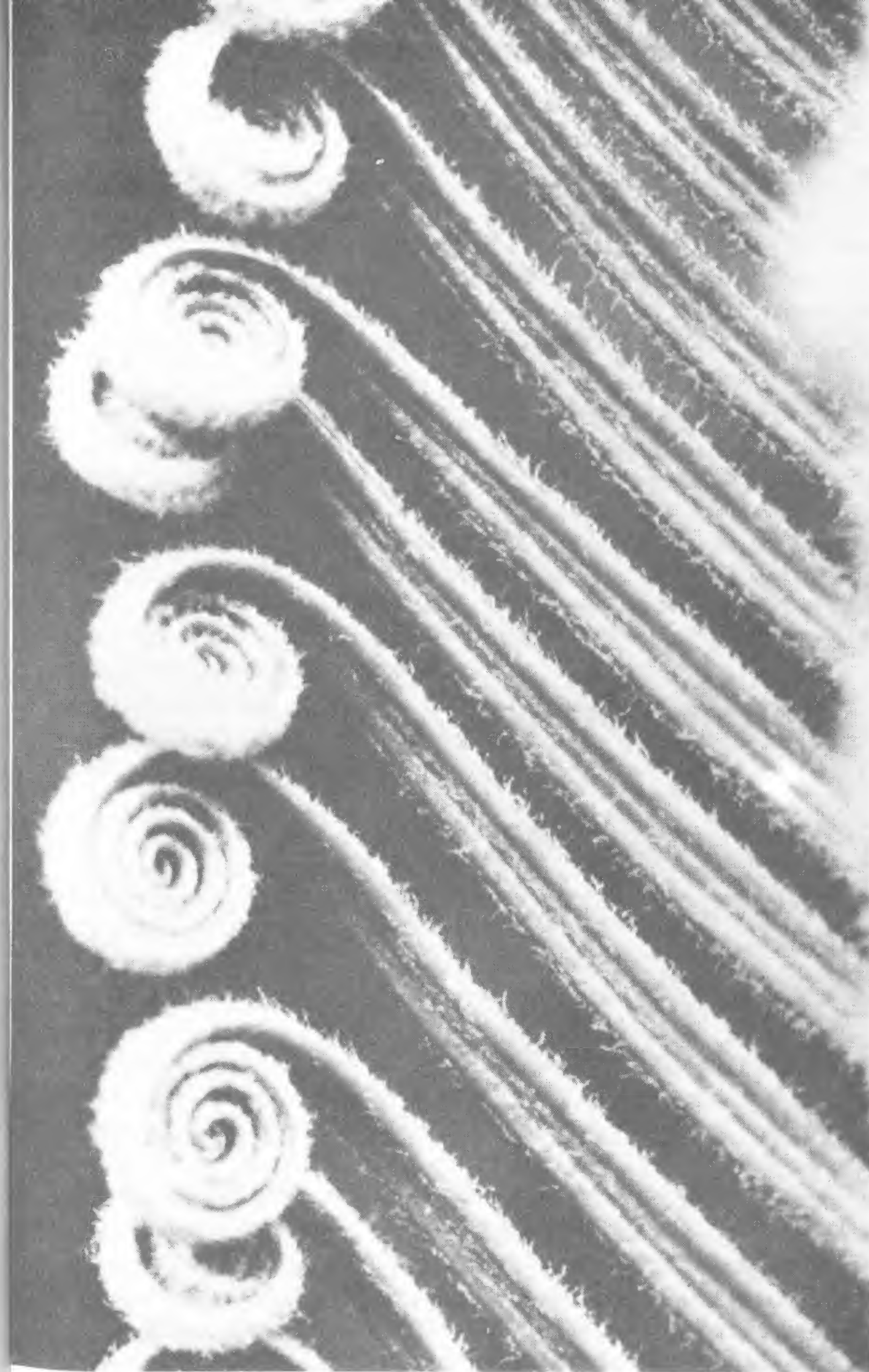
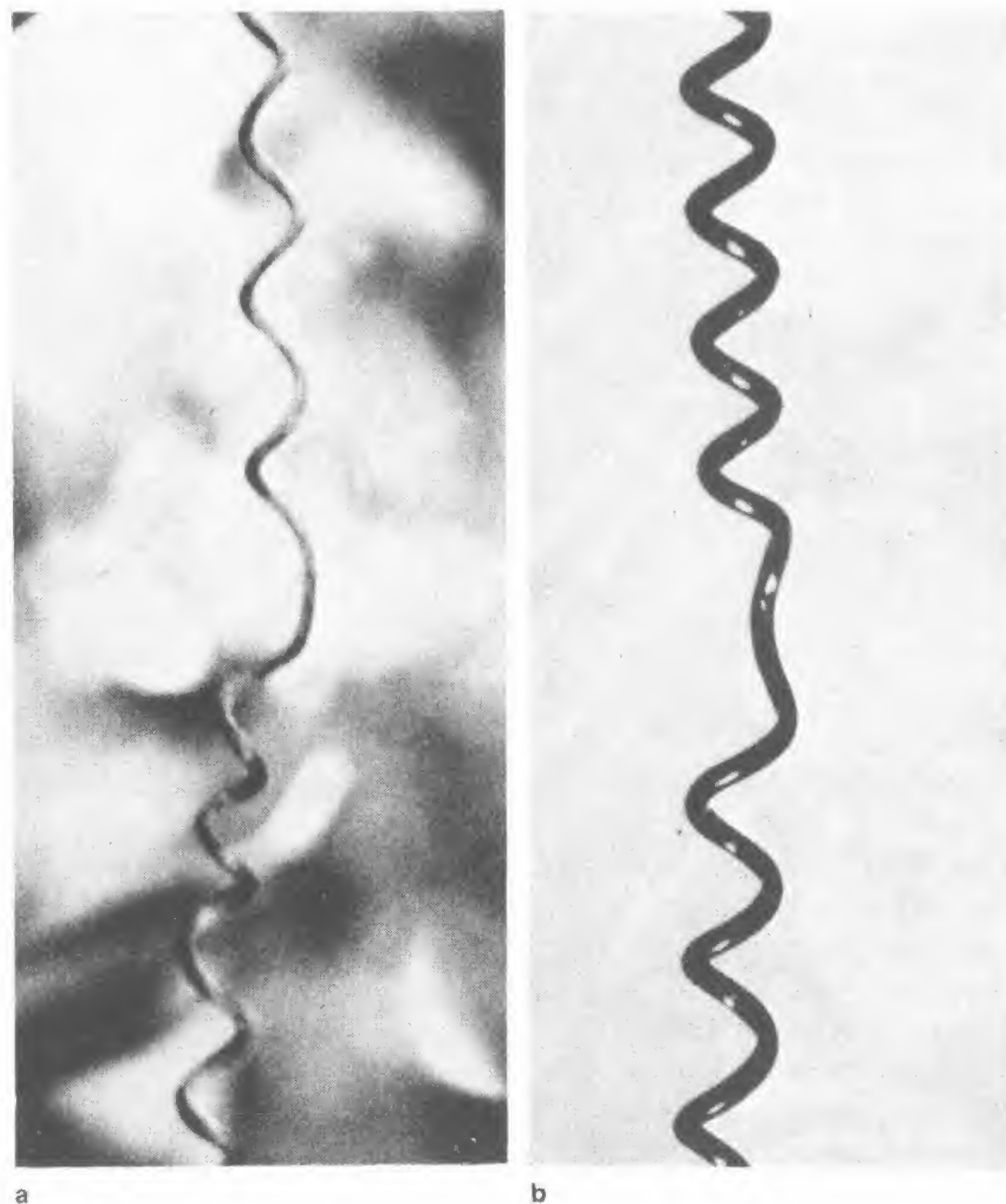


Fig. 54 ►





a  
Fig. 55

b

en dirección al rodigón o soporte a que el zarcillo se haya asido, y lo hacen al revés desde el punto de agarre hacia el tallo. En la mitad de su longitud, los dos tipos de espiras se neutralizan entre sí, formando un tramo recto. Como se ve en la figura 55b, dicho tramo puede darse también en el cordón del teléfono. Para deshacerlo, podemos dejar colgado el auricular del extremo del cordón hasta que

éste se desenrolle, es decir, hasta que sus espiras giren en la misma dirección.

De forma análoga, los gemelos siameses también se neutralizan entre sí. Si uno de ellos es diestro, con un mechón de pelo en remolino que gira en el sentido de las agujas del reloj y tiene su corazón situado a la izquierda, el otro será zurdo, y tendrá un mechón similar en sentido contrario y el corazón situado a la derecha. Los hermanos siameses son, por tanto, enantiomorfos, es decir, el uno es la imagen especular del otro, como sucede con los cristales dextrógiros y levógiros. Tanto el ADN como los aminoácidos admiten ambas formas, al igual que el azúcar. Algunas bacterias captan sólo uno de los dos tipos de enantiómeros: bien moléculas de azúcar dextrógira, bien levógira.

El convencimiento de que para toda espiral que gira hacia la derecha existe otra que lo hace hacia la izquierda suscita una interesante cuestión cosmológica. Los físicos han demostrado que toda partícula elemental tiene su enantiomorfo, consistente en una antipartícula de carga opuesta. El neutrón se empareja con el antineutrón, el protón con el antiprotón y el electrón con el antielectrón o positrón. Las antipartículas pueden, en teoría, combinarse entre sí para formar antielementos, antimundos e incluso una antivida. Si suponemos que las antipartículas son tan numerosas como sus enantiomorfos correspondientes (las partículas que conocemos), suposición difícil de obviar, ya que la creación de una de las formas siempre conlleva la aparición de la otra, la pregunta lógica que surge es: ¿dónde se hallan dichas antipartículas? Sabemos que no se encuentran en nuestro planeta, puesto que si esto ocurriera, al ponerse en contacto entre sí la materia y la antimateria se aniquilarían mutuamente, en una gran explosión de energía. ¿Han constituido las antipartículas un Universo distinto que no podemos percibir? ¿Han originado sus propias galaxias en el Universo que conocemos, u otras estrellas en nuestra propia galaxia? Quizás un testimonio de la aniquilación formidable de la materia y la antimateria lo represente la nebulosa del Cangrejo, que aparece en la figura 37h, o los misteriosos quasars, descubiertos en los últimos años.

Tal vez la materia y la antimateria no abunden en la misma medida, en cuyo caso el Universo sería asimétrico. Sabemos que la Natu-





Fig. 56

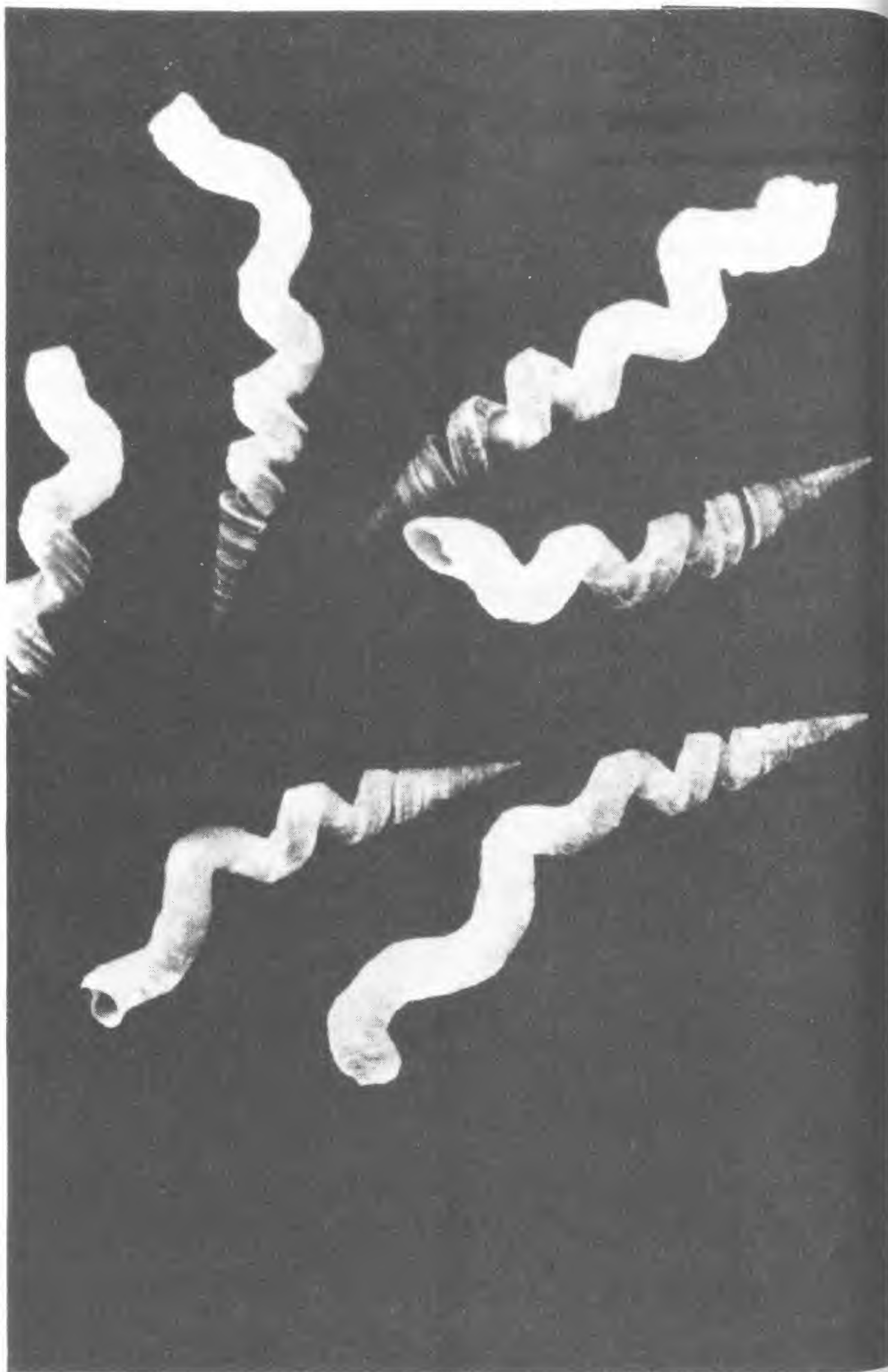
raleza favorece la formación de estructuras cuyo giro se efectúa a la derecha: ácidos nucleicos, hélices  $\alpha$  (una de las configuraciones básicas de las proteínas), fibras de colágeno, cilios, etc. Todas estas formas se caracterizan porque el giro de sus espiras se verifica en el sentido de las agujas del reloj, cuando la molécula se sitúa de manera que se aleje del observador, al igual que ocurre con un tornillo. ¿Cuál es la causa de esta predilección? Se ignora; quizá sea sólo un accidente en la evolución (las estructuras cuyo giro se verifica a la derecha formarían parte de los organismos mejor adaptados y serían por tanto seleccionadas). En una escala mayor, los seres vivos presentan los dos tipos de espirales: los zarcillos del dondiego de día muestran un giro a la derecha (opuesto al de sus flores, como se comprueba en la figura 56), y la madreselva, a la izquierda. Cuando unos y otros se encuentran, forman una compleja maraña. Los zarcillos del lúpulo giran en sentido contrario a los de la vid, de forma que, como obser-

vó Clerk Maxwell, un espejo transformará una «hélice de cerveza» en una «hélice de vino». El cocotero presenta formas de ambos tipos, aunque la variedad de giro a la izquierda predomina ligeramente y produce mayor número de cocos. Los extremos de los zarcillos hendidos de la parra presentan también espirales en cualquier dirección. La figura 57 muestra dos hélices de giro a la derecha asiéndose a un tallito de hierba. Los genes determinan el enrollamiento de la concha del caracol y pueden darse ambas formas de giro, aunque en cada



Fig. 57





especie predomina una de las dos. En la figura 58 se aprecian los plegamientos de las conchas de gasterópodo marino *Vermicularia spirata*. Como Stephen Gould puntualizó, los factores ambientales que determinan si es o no ventajoso para este animal alcanzar una altura superior a su concha determinan el grado de compactación de sus espiras pero no la dirección de las mismas.

Es obvio, de cualquier forma, que no todas las espirales se configuran por pares: ningún ciclón tiene su anticiclón correspondiente, y cuando se quita el tapón de la bañera y se vacía el agua contenida en ésta, se obtiene un solo remolino. ¿Se ha preguntado el lector alguna vez por qué el centro del vórtice originado en el desagüe de una bañera presenta una depresión que no contiene agua? La respuesta es bastante interesante y obedece a la misma razón por la que la galaxia forma brazos proyectados de su masa principal: la fuerza centrífuga. El agua aumenta su velocidad de rotación cuando fluye hacia el centro del vórtice (análogamente a lo que, según se dijo, ocurría con un patinador que pegara sus brazos al cuerpo) debido a que la velocidad debe incrementarse para mantener constante el momento angular. Así, mientras el agua fluye hacia el centro del remolino, su velocidad aumenta hasta girar tan rápidamente que se proyecta hacia el exterior, como un ovillo situado en el extremo de un cordel que gira. El resultado de este proceso podemos verlo en la figura 59, en la que una columna de aire ocupa el espacio interior central dejado por el agua al girar hacia fuera en un embudo de cristal.

Aunque toda turbulencia se caracteriza por la presencia de vórtices o espirales, es evidente que no todas las espirales son turbulentas. El diseño de la figura 23a no es un vórtice, sino que representa, en su forma más pura, una espiral sencilla que mantiene constante la distancia entre sus sucesivas espiras. Puesto que una espiral de este tipo fue descrita primeramente por Arquímedes, recibe el nombre del físico griego. Es la trayectoria descrita por una mosca que se desplaza del centro hacia la periferia a lo largo de un radio de una rueda giratoria; es también la forma de un rollo de cuerda o de papel, o de un ovillo de lana (fig. 60).

La misma trayectoria corresponde al rastro dejado por la primitiva babosa de mar del género *Dictyodora*. A partir de estudios efectuados en sus galerías fosilizadas, el investigador Adolf Seilacher

◀ Fig. 58





Fig. 59

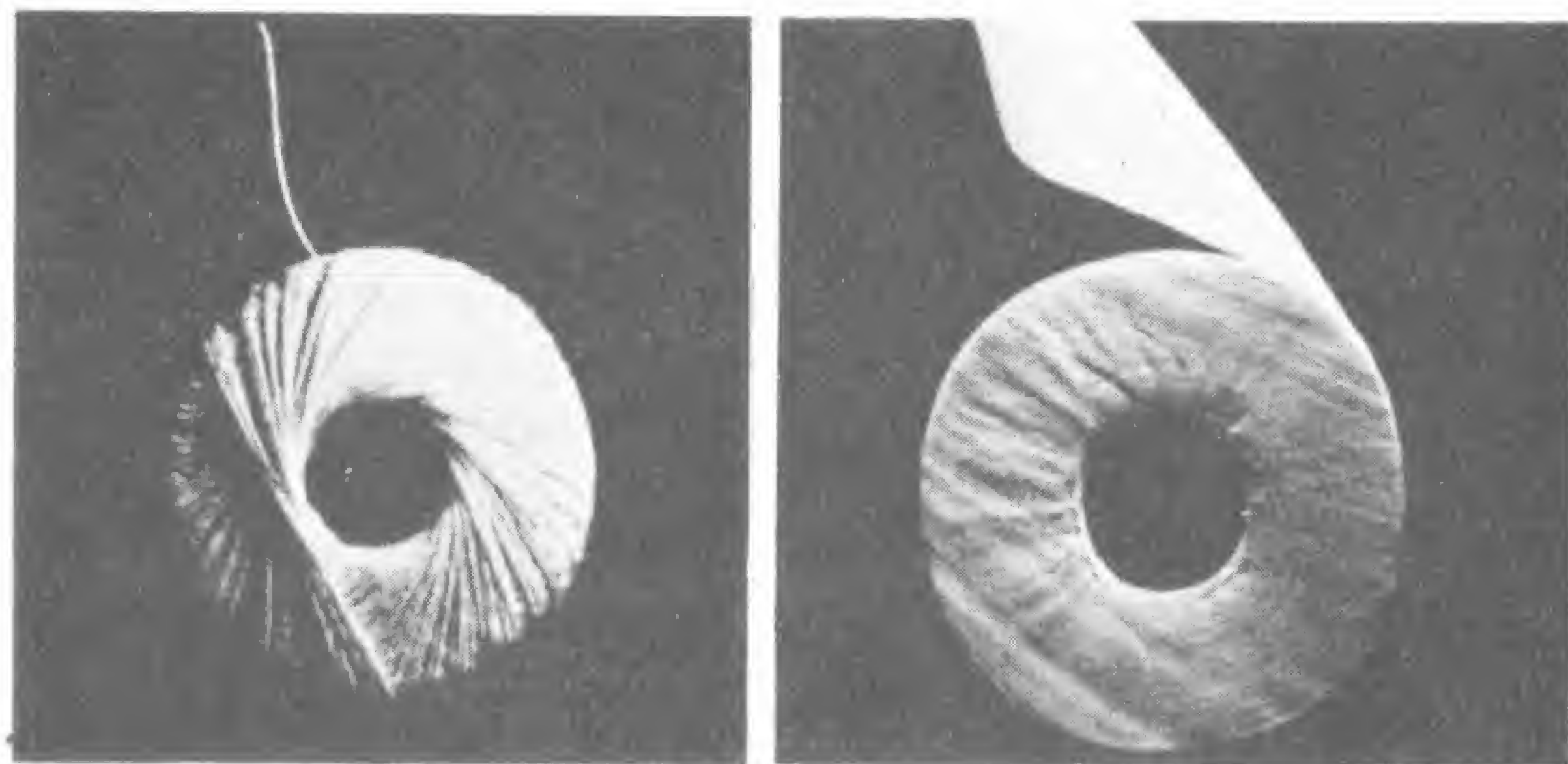


Fig. 60

refiere que *Dictyodora* se desplazaba al principio sobre sedimentos marinos de una forma aleatoria, pastando aquí y allá, como puede hacerlo una vaca en un prado. Posteriormente, en el transcurso de la evolución, el animal cambió sus hábitos alimentarios y comenzó a efectuar sus vagabundeos en espirales más cerradas, lo que le permitía recorrer la totalidad de una área dada. La trayectoria descrita por el molusco era, en este estadio evolutivo, similar a la de una vaca atada a un árbol: dado que la vaca va estrechando en su movimiento la cuerda en torno al árbol, la faja de hierba pastada por ella es cada vez más estrecha. En el estadio final de la evolución del comportamiento alimentario de *Dictyodora*, el animal se movía en vertical, hacia arriba y hacia abajo, mientras realizaba sus desplazamientos en espiral a través de las capas de sedimento, de manera que la trayectoria descrita por el animal se convirtió en una hélice tridimensional, similar a un sacacorchos.

Numerosos caracoles marinos espiralizan sus conchas de forma que las cámaras progresivamente mayores que se originan envuelven y rodean a las anteriores de manera regular (fig. 61). En vez de mantener la misma anchura entre las espiras, como ocurría en la espiral de Arquímedes, en el caracol marino dichas espiras experimentan un incremento constante en su anchura produciendo lo que se denomina una espiral logarítmica. Según crece el animal, extiende y amplía el espacio interno de su concha para formar una estructura continua enrollada sobre sí, como en el caso de los buccinos, o dividida en cámaras, como sucede con el conocido nautilus, *Nautilus pompilius*. En ambos moluscos, cada nuevo incremento tiene una morfología y situación similares a las últimas producidas y únicamente se diferencia en su tamaño algo mayor. La clave para mantener el crecimiento en espiral de la concha estriba en permitir que la cara externa de ésta, la que se halla más alejada del eje alrededor del cual se forman las espiras, crezca en mayor medida que la cara interna. Esta diferencia de crecimiento es la responsable del enrollamiento de la concha. Ningún gen necesita codificar o programar la forma final de la concha: sólo se requiere que facilite un crecimiento diferencial entre las superficies exterior e interior.

Como puntualiza D'Arcy Thompson, los cuernos crecen de un modo similar. Si, en la base del cuerno, el borde delantero crece más



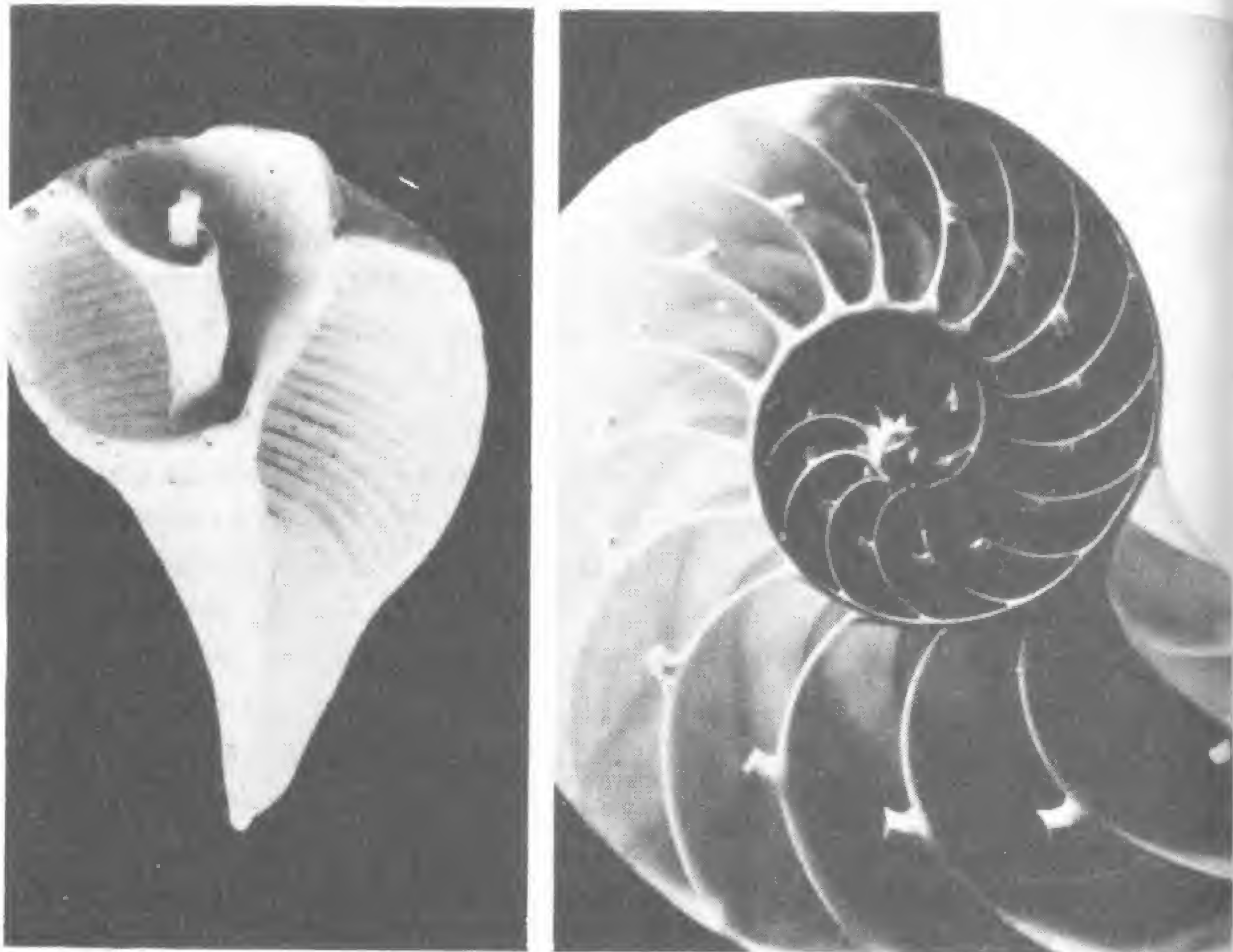


Fig. 61



Fig. 62

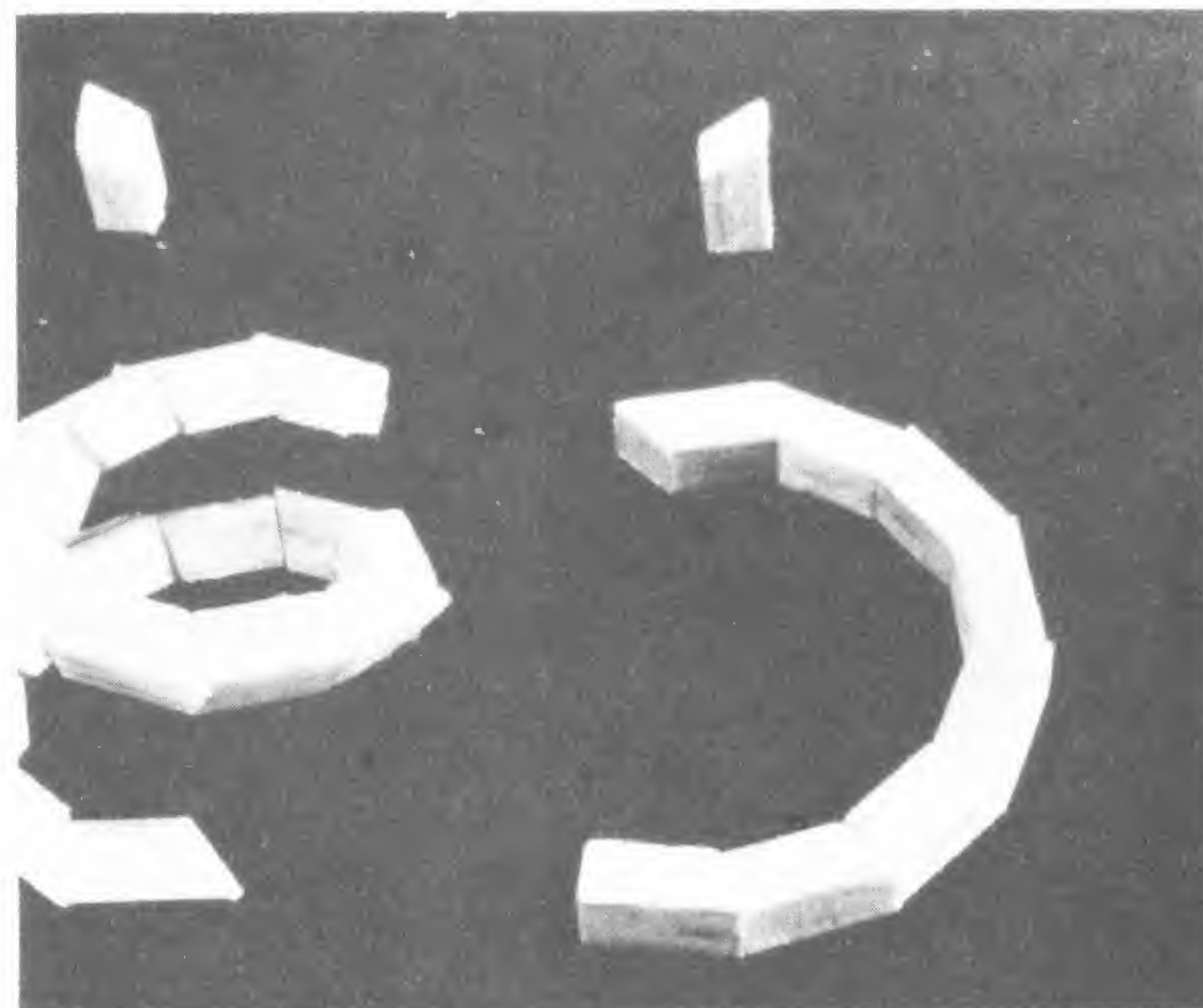


Fig. 63

que el trasero, el cuerno se curva hacia atrás. Si en dicha base es la superficie interna, que mira hacia el otro cuerno, la que experimenta el crecimiento más rápido, el cuerno se curva hacia afuera. La combinación de estos dos movimientos de curvatura, hacia atrás y hacia afuera, da lugar a la forma en hélice o sacacorchos que observamos en los cuernos de la cabra montés (fig. 62).

El fenómeno de la curvatura tiene carácter general en la Naturaleza y es independiente del tipo de tejido o material que esté implicado en el proceso. Las formas experimentan curvatura con objeto de que la superficie mayor, aquella cuyo crecimiento es más rápido, se disponga al exterior, y la más reducida, con un crecimiento más lento, quede hacia el interior.

La figura 63 confirma la regla. Una serie de piezas rectangulares forman al unirse una columna recta, pero si cada una de las caras



que participan en la unión está biselada, entonces la columna se curva alrededor de sí misma para formar un círculo. Si la cara que se une es desviada del plano horizontal, la columna se curva y constituye entonces una estructura helicoidal tridimensional. En cierto sentido, por tanto, la columna recta supone sólo un caso especial de hélice: sería una hélice que no gira. No nos sorprende entonces saber que el ácido desoxirribonucleico o ADN, que constituye el material de la herencia biológica y se halla en los cromosomas, consiste en una combinación de dos hélices sencillas formadas por azúcares y fosfato que giran sobre sí mismas debido a que los enlaces establecidos entre ellas son de diferente longitud. De la misma forma que el cuerno se origina a causa del depósito de hueso en capas oblicuas, la doble hélice del ADN resulta del apilamiento de unidades moleculares sesgadas.

Este principio básico de que la superficie mayor se sitúa por fuera de la más corta es común a todas las espirales. La línea de corriente más larga se halla al exterior con respecto a la de menor longitud y se curva alrededor de ésta, y la superficie interior de una barra sometida a fuerzas de tensión se alarga y envuelve la parte superior, comprimida por dichas fuerzas. Nuestros automóviles están equipados con engranajes diferenciales que permiten a aquella rueda trasera situada en la parte exterior al tomar una curva rodar más deprisa, y cubrir por tanto una distancia mayor que la rueda trasera que queda hacia el interior de la curva.

Los termostatos operan según el mismo principio. Si, como muestra la figura 64, dos láminas, de latón y de hierro, de idéntica longitud (arriba) se calientan separadamente (centro), el latón (lámina de color claro) se dilata más que el hierro. En caso de que se unan las dos láminas y después se calienten, la de latón se curvará sobre la de hierro (abajo). La curvatura o no curvatura de las láminas determina el apagado o encendido del horno.

La regla general es clara: si las velocidades de crecimiento o dilatación de las dos superficies son iguales, el material presenta una posición recta; si son diferentes, el material se curva de forma que la parte de crecimiento más lento quede hacia el interior y la de crecimiento más rápido se disponga al exterior. Podemos observar manifestaciones de esta ley dondequiera que miremos. En la figura 65

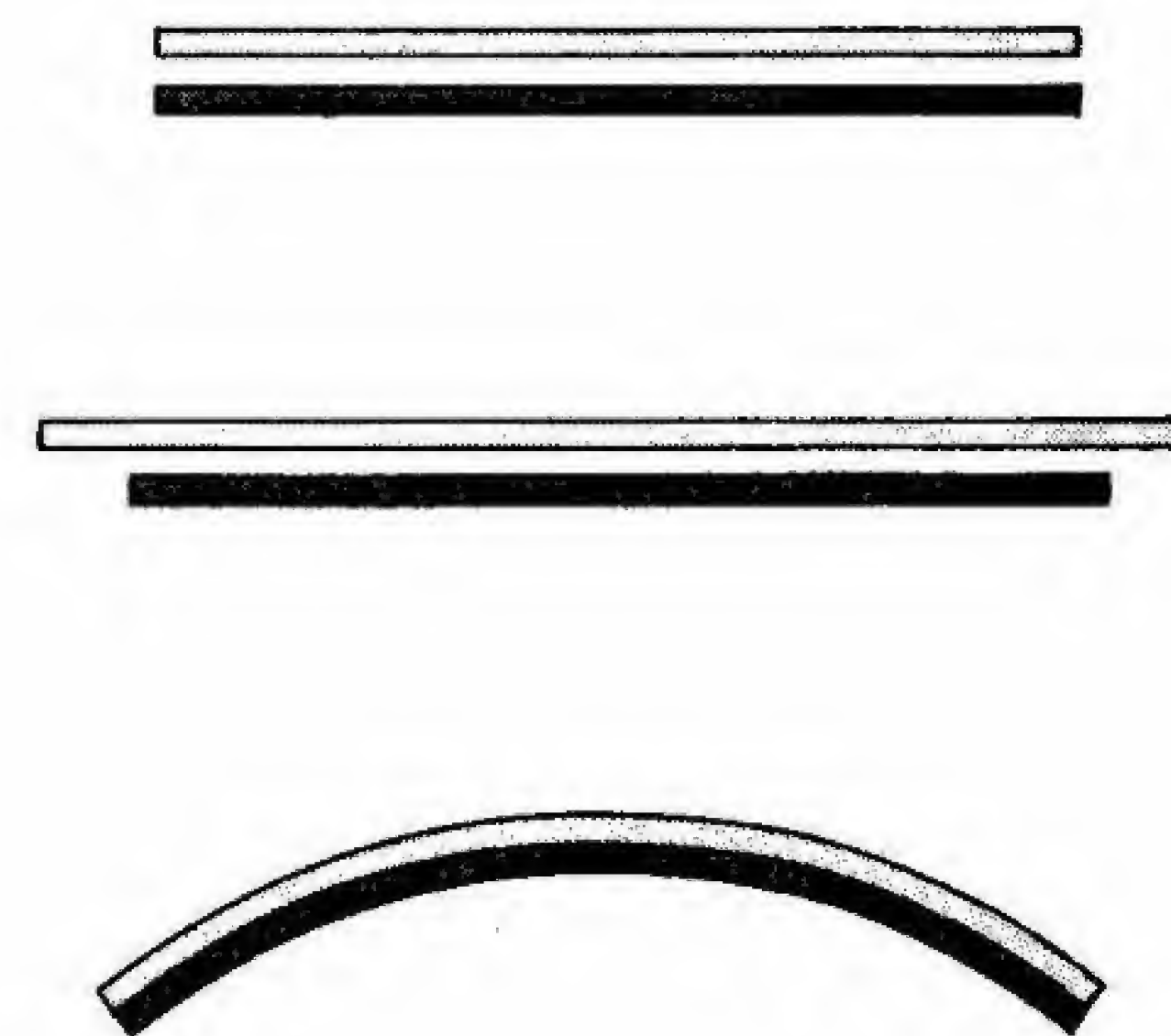


Fig. 64

se representan algunos ejemplos: abarquillamientos en desconchados de pintura, hojas modificadas alrededor del pistilo de un lirio acuático, la hoja seca de una poinsetia y la superficie rugosa de una hoja marchita antes de caer del árbol. En todos estos casos la superficie mayor envuelve y encierra a la menor. Lo mismo ocurre en el ángulo externo del labio humano, ya que el tejido interno crece con mayor rapidez que el externo, y en la flexión de nuestros brazos y piernas, cuando los músculos de un lado se contraen y los del otro se relajan. Todo confirma que las superficies menos extensas están encerradas o limitadas por las de mayor extensión, y que existe más espacio en el exterior de una área dada que en su interior.

### Formas sinuosas

*«El camino de una serpiente en la roca está más allá de nuestro entendimiento.»*

Proverbios 30:19

Las formas sinuosas o serpenteantes se hallan estrechamente relacionadas con las espirales. Hemos visto que en un cuerpo que crece, si una superficie es mayor que la otra, la forma se curva sobre



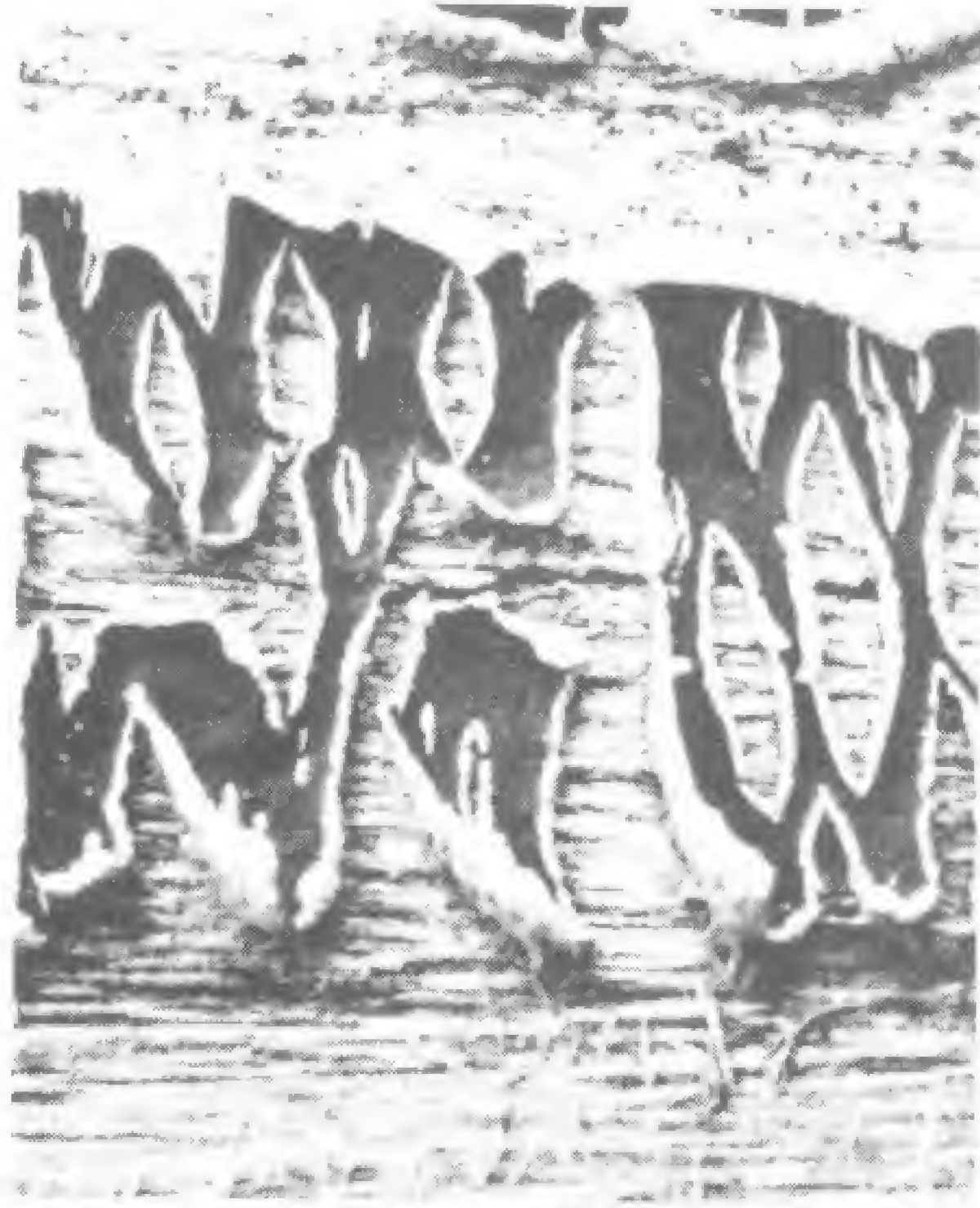
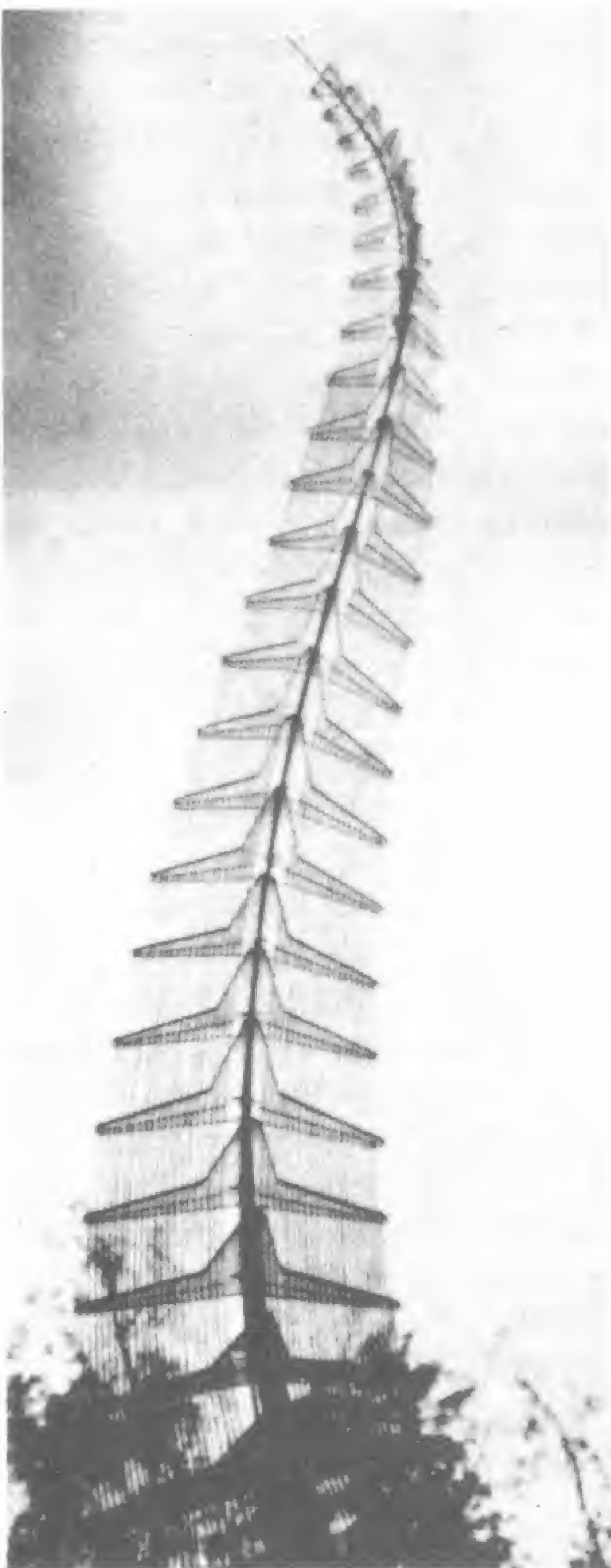


Fig. 66



◀ Fig. 65



sí misma. Si el crecimiento de las dos superficies varía de una manera periódica, se produce entonces un serpenteo y la forma resultante es sinuosa. Los músculos de una serpiente, por ejemplo, se contraen y se relajan alternativamente en ciclos a lo largo de cada uno de los flancos del animal. Estas contracciones y extensiones alternadas hacen que el cuerpo ondule de un lado a otro, al igual que nuestros propios músculos controlan la posición y la forma de nuestras columnas vertebrales, variables según las circunstancias, y los alambres determinan la forma de la columna flexible de Frei Otto (fig. 66). En el diseño de Otto, las placas triangulares de tamaño decreciente según se asciende en la columna, soportan cargas de compresión y representan una buena analogía de las vértebras. Los alambres en tensión terminan en diferentes placas, y cuando los mismos son acortados o alargados mediante un mecanismo de control situado en la base, la columna gira o se curva en cualquier dirección. La columna flexible, cualquiera que sea su forma, puede, al igual que nuestra columna vertebral, soportar cargas sobrepuestas.

De la misma forma que la espiral de Arquímedes se curva sobre sí misma para ocupar todo el espacio posible, las formas sinuosas aleatorias giran y se curvan y vuelven sobre sí para ocupar también el espacio que las rodea. La figura 23b del capítulo 2 muestra cómo se efectúa este proceso. El coral cerebriforme y los dominios magnéticos de un trozo de granate, que aparecen en la figura 67, obedecen al mismo diseño. En ambos casos, se forman líneas sinuosas agrupadas de manera compacta por efecto de la acción de fuerzas contrapuestas. Los pólipos coralinos, animales dotados de finos tentáculos ondulantes, se alinean en los surcos del coral cerebriforme en formaciones casi militares. Cada individuo deposita sus secreciones calcáreas en las crestas situadas entre los surcos, al igual que los sacos terreros en un dique, y cada fila presiona y es presionada por las filas vecinas a través de las crestas. Cada hilera avanza o retrocede según determina la inexorable presión ejercida por las restantes y el resultado de todo ello es un diseño de líneas sinuosas estrechamente agrupadas, que representa una situación de equilibrio. En el caso del granate, las alineaciones de moléculas de diferente polaridad magnética maniobran de un modo similar a fin de ocupar sus respectivos territorios.

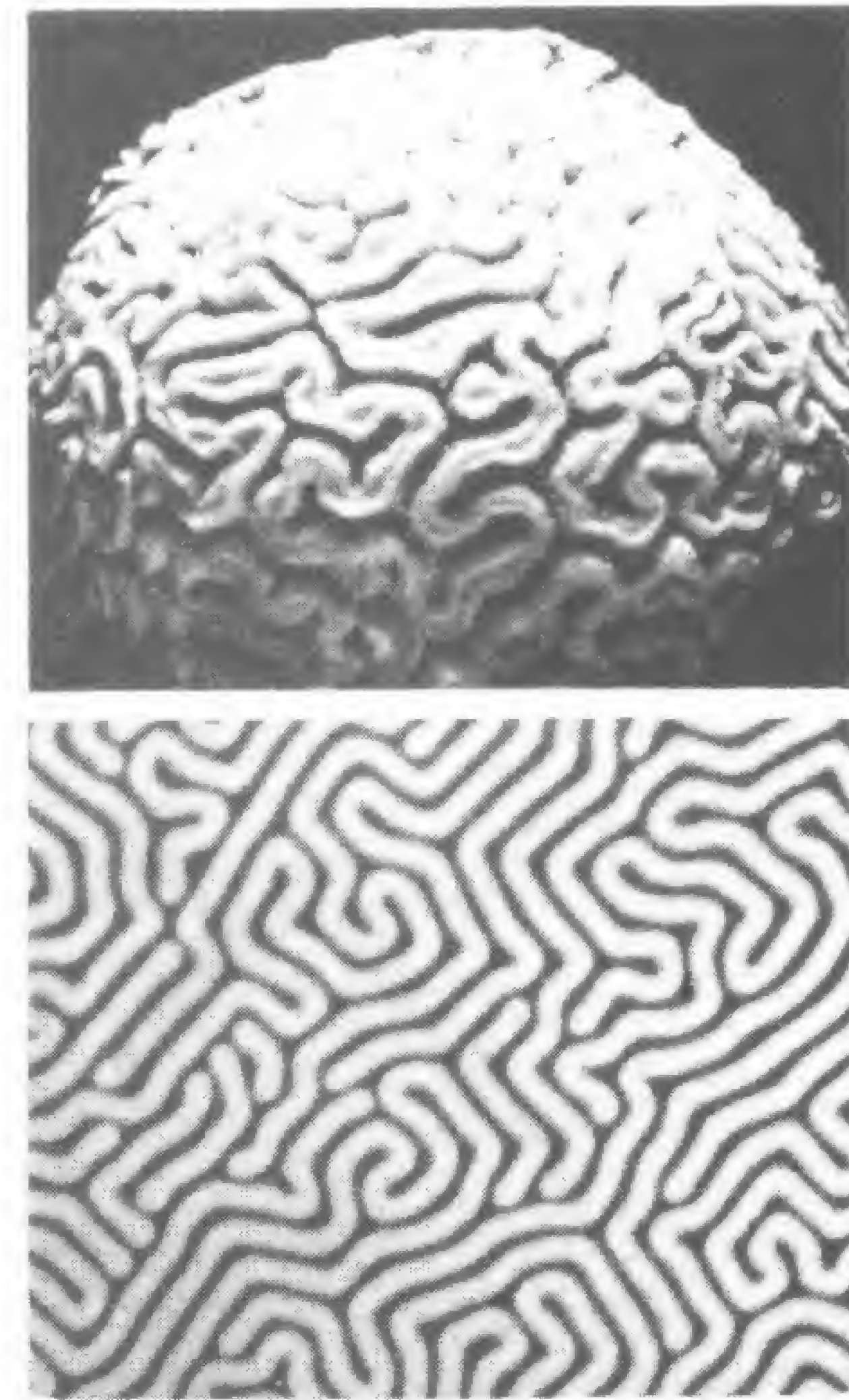


Fig. 67

Pero ¿qué ocurre en el caso de una única línea sinuosa, por ejemplo la descrita por el curso de un río, cuya forma no es el resultado de las presiones ejercidas por corrientes vecinas? ¿Por qué fluye el río según este diseño?

En primer lugar, podríamos suponer que el río sigue los accidentes del terreno que atraviesa y que gira y se curva en respuesta directa a las escarpaduras y pendientes del relieve. Los grandes declives determinan, por supuesto, la dirección del cauce de un río, pero incluso en una pendiente uniforme y suave hallamos que el agua no corre colina abajo en línea recta, sino que vaga hacia uno y otro lado, como un esquiador disputando un slalom. Gira y se desvía con suavidad, pero al mismo tiempo de una forma aparentemente brusca para



evitar los deslizamientos rectos del fondo. Además, los giros resultan ser regulares, independientemente de los cambios topográficos. Las curvaturas que presenta pueden predecirse; no son arcos circulares, parabólicos o sinusoidales, sino que se trata de auténticas figuras elípticas. Éstas se caracterizan por ser las formas curvas más suaves y porque presentan la menor variación posible en la dirección de su curvatura.

Estas curvas regulares se producen tanto en los ríos grandes como en los pequeños. La figura 68 (adaptada de Leopold, 1960) muestra tres cauces: el del río Duck Creek, cerca de Cora (Wyoming); el New Fork, en las proximidades de Pinedale (Wyoming), y el Mississippi, en Point Breeze (Luisiana), cuyas respectivas anchuras son de 2,4 m, 18 m y más de 1 km. Pese a que la gama de variacio-

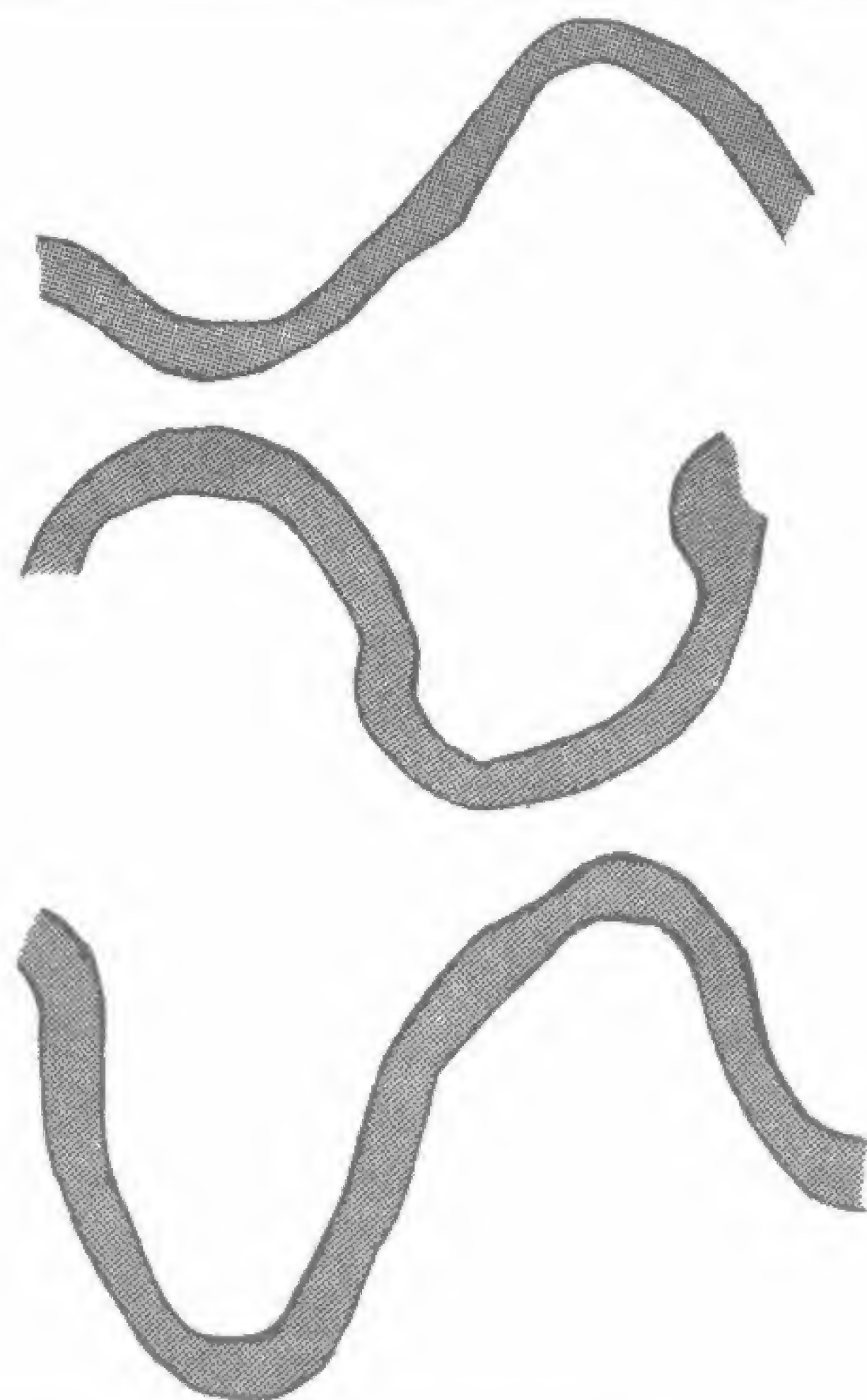


Fig. 68



Fig. 69

nes en la anchura es grande y va de 400 a 1, los tres presentan el mismo diseño sinuoso y tienen las mismas proporciones.

A partir de estudios realizados sobre un total de cincuenta cursos fluviales, el hidrogeólogo Luna B. Leopold concluyó que ningún río, cualquiera que fuera su tamaño, presentaba tramos rectos de longi-



tud superior a diez veces la anchura de su cauce. Además, el radio de curvatura era casi siempre igual a dos o tres veces dicha anchura y la «longitud de la onda» (distancia comprendida entre puntos análogos de curvas similares) era de siete a diez veces la anchura. Así, pese a las grandes diferencias existentes en cuanto a tamaño y condiciones del lecho fluvial, los ríos discurren siguiendo cursos sorprendentemente uniformes. La figura 69 muestra meandros similares de un río de Alaska y del Snake River de Wyoming.

Podemos proponer tres hipótesis distintas para tratar de explicar este diseño regular, tres modelos que eluciden por qué todos los ríos y cursos de agua forman el mismo tipo de curvas.

El primero de ellos es el modelo mecánico, descrito por Albert Einstein, relacionado con el efecto de la fuerza centrífuga. Si suponemos que una pequeña curva del río se produce debido a cualquier irregularidad menor del terreno, la fuerza centrífuga que entra en acción mientras el agua sigue la trayectoria de dicha curva tiende a proyectar aquélla contra la parte cóncava de la ribera (para impedir un efecto semejante, en los circuitos automovilísticos se diseñan terraplenes y pendientes y curvas con peralte). Debido a que el agua que se halla cerca de las orillas en la superficie de un río experimenta a causa del roce con aquéllas una fricción que le hace perder velocidad, se mueve transversalmente hacia la orilla cóncava y es reemplazada desde abajo por agua que circula por el fondo en dirección opuesta. Por consiguiente, como se ha representado en el esquema de la figura 70, se establece una corriente circular que, en la superficie, va hacia la orilla cóncava, se hunde y recorre la pared de dicha orilla para invertir después su dirección y ascender lentamente, frenada por la fricción con el fondo. La sección transversal del río se vuelve asimétrica, como muestra la figura, y, lo que es más importante, la orilla cóncava sufre una erosión que incrementa su curvatura y, como consecuencia, el río adopta un curso sesgado y oblicuo en lugar de recto. En ocasiones, sin embargo, la fuerza de gravedad hace que el río siga una trayectoria directa pendiente abajo y se desvíe de su curso primitivo, dando lugar a otra curva y otra circulación transversal, esta vez de dirección contraria a la primera. La nueva curva se torna más pronunciada como resultado de la acción de la fuerza centrífuga, y el río, en lugar de continuar fluyendo en línea recta hacia

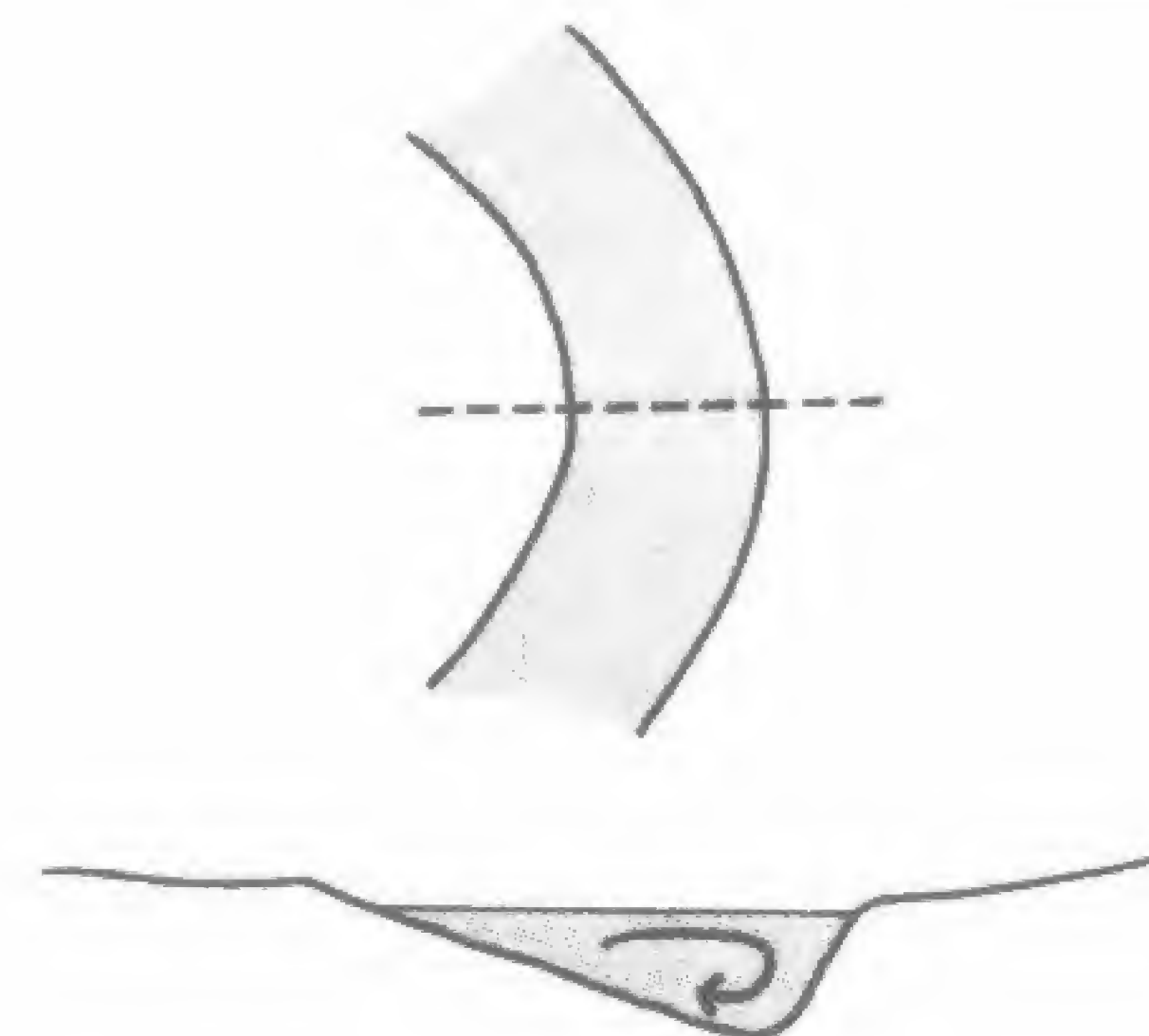


Fig. 70

abajo, cruza la pendiente en dirección contraria y el proceso sigue. La erosión de las aguas incrementa y acentúa cada curva de forma que el río debe corregir continuamente su trayectoria, tal como lo hace un conductor que circula con su vehículo por una carretera con abundantes curvas.

Es interesante destacar que, debido al avance general del agua al circular, el punto de máxima erosión se halla situado pasado ya el ápice de la curva, por lo que ésta se desplaza lentamente en el sentido de la corriente. El agricultor que tiene sus tierras en esta zona del río contempla a través de los años sólo el tramo de la curva donde posee sus terrenos y la concibe como algo cambiante, donde unas veces se deposita suelo nuevo procedente de los sedimentos dejados por el río, y otras desaparece parte de aquél arrastrado por las aguas. La visión más correcta consiste, sin embargo, en pensar que hereda los nuevos terrenos de cultivo y los que le siguen de los tramos anteriores del río.

La segunda forma de describir la formación de los meandros es en términos de un gasto uniforme de energía. La erosión hace que las curvas sean suaves y uniformes, sin cambios bruscos en su dirección. Ello minimiza la erosión, de forma que el río realiza un trabajo lo más reducido posible, con el menor gasto energético, cuando se desplaza siguiendo la trayectoria de la curva. Un trozo flexible de me-



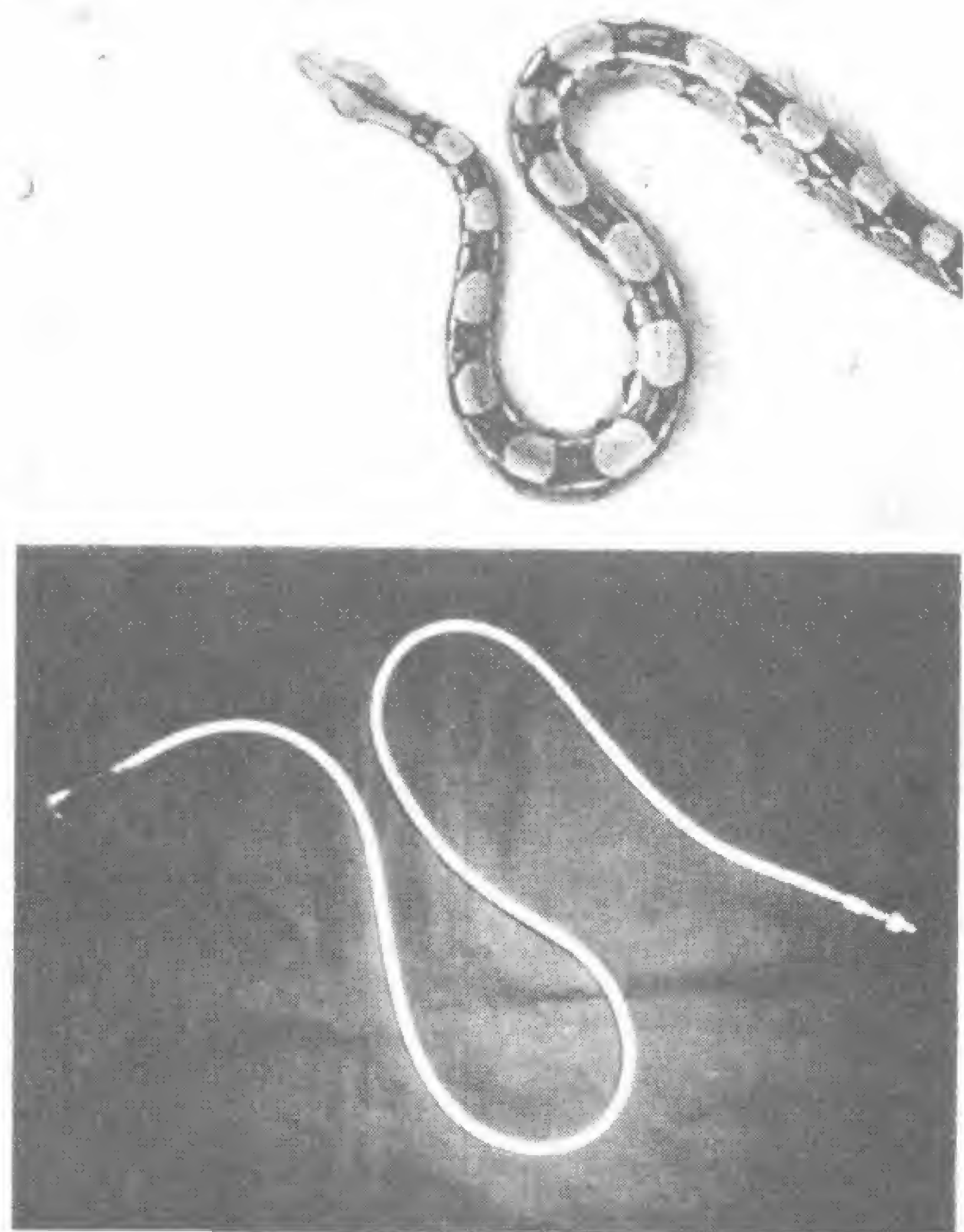


Fig. 71

tal, como el cable que aparece en la figura 71, forma también curvas suaves cuando se dobla, similares a las de los meandros de los ríos, de la misma manera que lo hacen una manguera extintora, una boa constrictora, el itinerario seguido por un corredor o un esquíador, o cualquiera de nuestras carreteras con el fin de evitar derrapes, sacudidas y frenazos repentinos en los vehículos.

El río parece por tanto interesado en gastar su energía de la manera más uniforme posible. En aguas superficiales y turbulentas, co-

mo las que se dan en el curso alto, la energía se pierde en forma de calor, generado en remolinos y rápidos, mientras que en aguas profundas y tranquilas, sobre todo en el curso bajo, donde el avance es fácil, gira y se tuerce para dar lugar a curvas y meandros como si tendiera a gastar en esta zona la misma cantidad de energía que en las partes más altas y escarpadas de su recorrido. Así, un río parece dosificar su trabajo: gira y se desvía de su recorrido de manera que el trabajo realizado se mantenga uniforme y se gaste siempre la misma cantidad de energía, tanto en aguas tranquilas y profundas como en tramos bajos y turbulentos.

El tercer modelo para explicar los meandros se basa en el análisis de las líneas de un río en términos de aleatoriedad y probabilidad. Hermann von Schelling, de la General Electric, ha demostrado la regla general de que cualquier línea de una longitud dada que se alarga entre dos puntos fijos es muy probable que adopte la forma de un meandro. Para ello, diseñó matemáticamente una serie de trayectorias al azar, en las cuales un punto móvil podía desviarse de su camino en cualquier dirección mientras se desplazaba entre dos puntos fijos, con tal de que la longitud total de su recorrido resultara ser la establecida. Encontró que la trayectoria más probable para dicho punto presentaría una forma serpenteante, con proporciones similares a las halladas en los ríos.

Para describir los meandros podemos, por tanto, recurrir a tres modelos: uno basado en la acción de la erosión y la fuerza centrífuga; otro que los describe en términos de gasto uniforme de energía, y un tercero que se fundamenta en la teoría de la probabilidad. Los tres hacen referencia a un mismo fenómeno, y desde este punto de vista tales modelos presentan una cierta interrelación (que por otra parte no va más allá de lo estrictamente necesario). Es decir, que la circulación transversal inducida por la fuerza centrífuga no exige necesariamente que se establezca una distribución uniforme del trabajo realizado, ni tampoco que se verifique una trayectoria o recorrido particularmente probable. En un mundo sujeto a un número limitado de modelos y patrones básicos, la forma de meandro, prototipo de diseño sinuoso, responde sin embargo a conjuntos de requerimientos por completo diferentes, de manera que la erosión, el trabajo uniforme y la probabilidad dan lugar al mismo patrón o diseño.



## Explosiones

Otro diseño, que en algunos casos puede estar también relacionado con el flujo, es la explosión, muy fácil de identificar y de entender. Como se mostraba en la figura 24, se caracteriza por presentar trayectorias que unen directamente el centro con los diferentes puntos periféricos, de forma que la densidad de dichas trayectorias disminuye con la distancia al origen (como ocurre con la intensidad del sonido o la de la luz).

En la figura 72 vemos el aspecto que presenta el cráter lunar de Tycho, en el que el material proyectado por el impacto que provocó el cráter aparece esparcido en un radio de más de 2.400 km. Cuando más nos alejamos del cráter central, más escasos y dispersos son los radios. En la figura 73 se observa el mismo diseño, esta vez tridimensional, en unos fuegos artificiales, y de nuevo comprobamos cómo la densidad decrece según aumenta la distancia al punto de la explosión.

Cuando se utiliza el diseño en explosión en construcciones artificiales, la concentración de material en el centro de las mismas pre-



Fig. 72

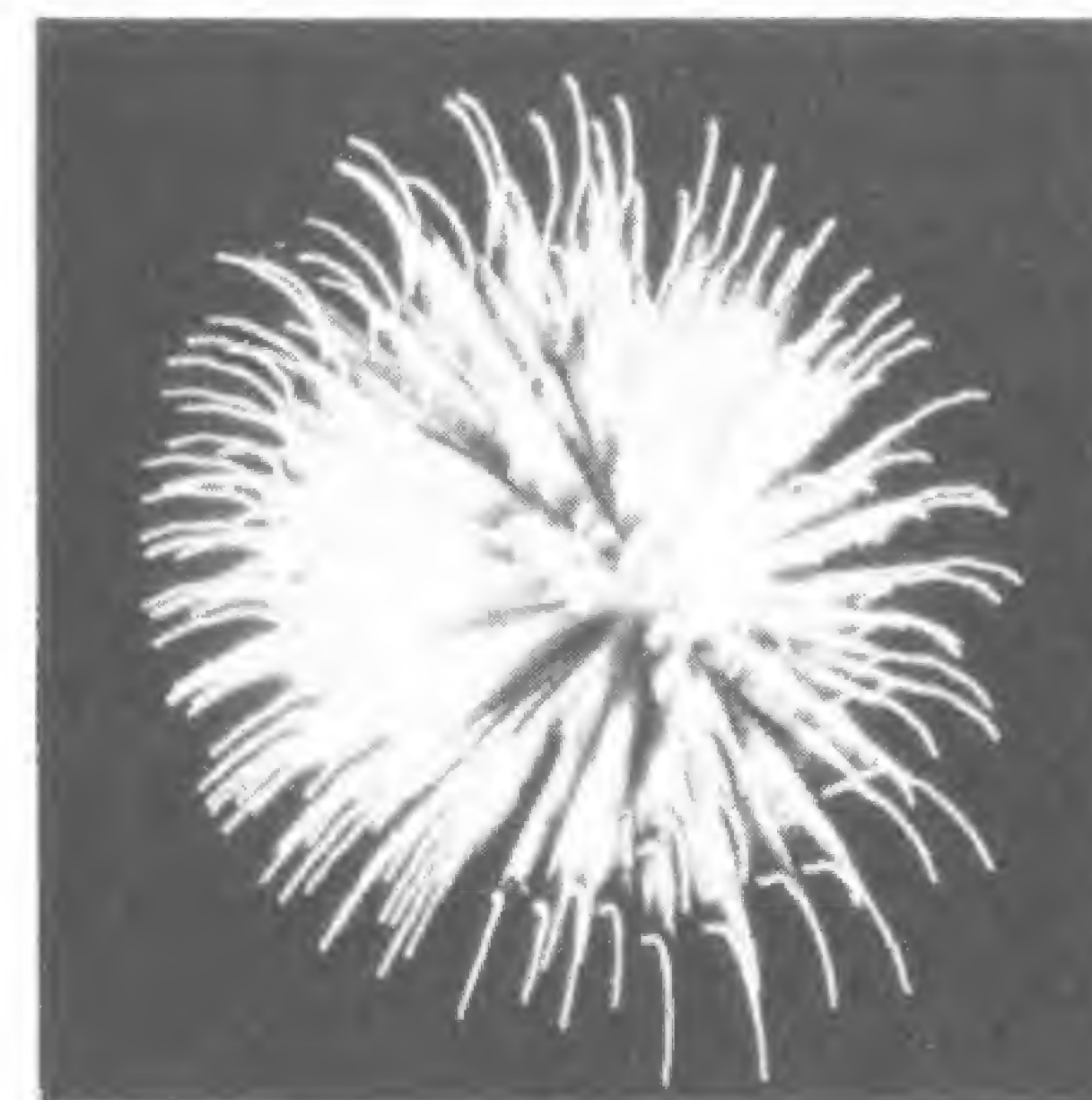


Fig. 73

senta una sobrecarga. Se requiere menos material, por ejemplo, en el diseño de una cúpula cuando las nervaduras se distribuyen de una forma geodésica que cuando lo hacen según un modelo en explosión. En la figura 74 observamos cómo las nervaduras de una cúpula convencional parten a modo de radios hacia la periferia y hacia abajo en un diseño en explosión típico. La mayor concentración de material se produce en el centro y en la cima de la cúpula, que son precisamente las zonas que soportan menores cargas. Por el contrario, la llamada cúpula geodésica (fig. 74b) ofrece una distribución uniforme

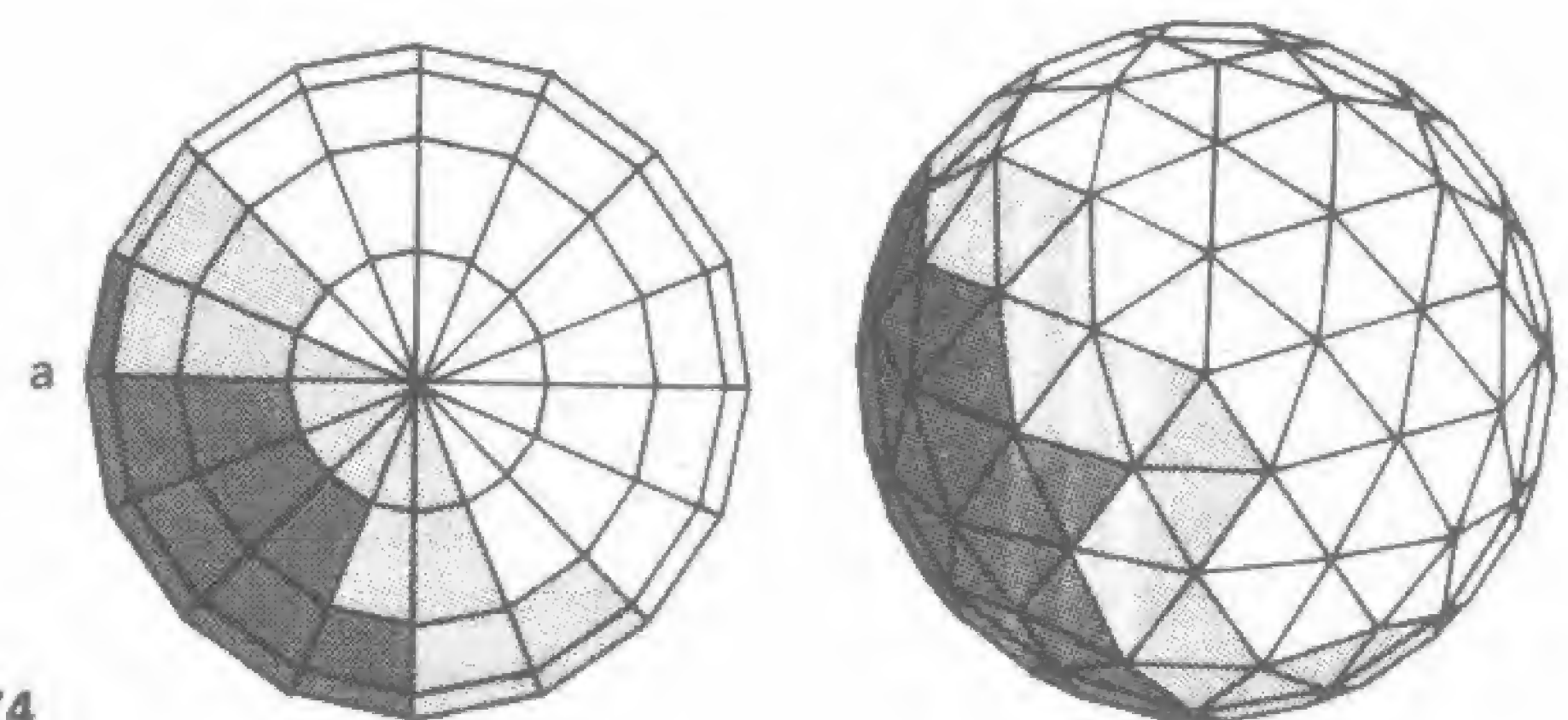


Fig. 74





Fig. 75

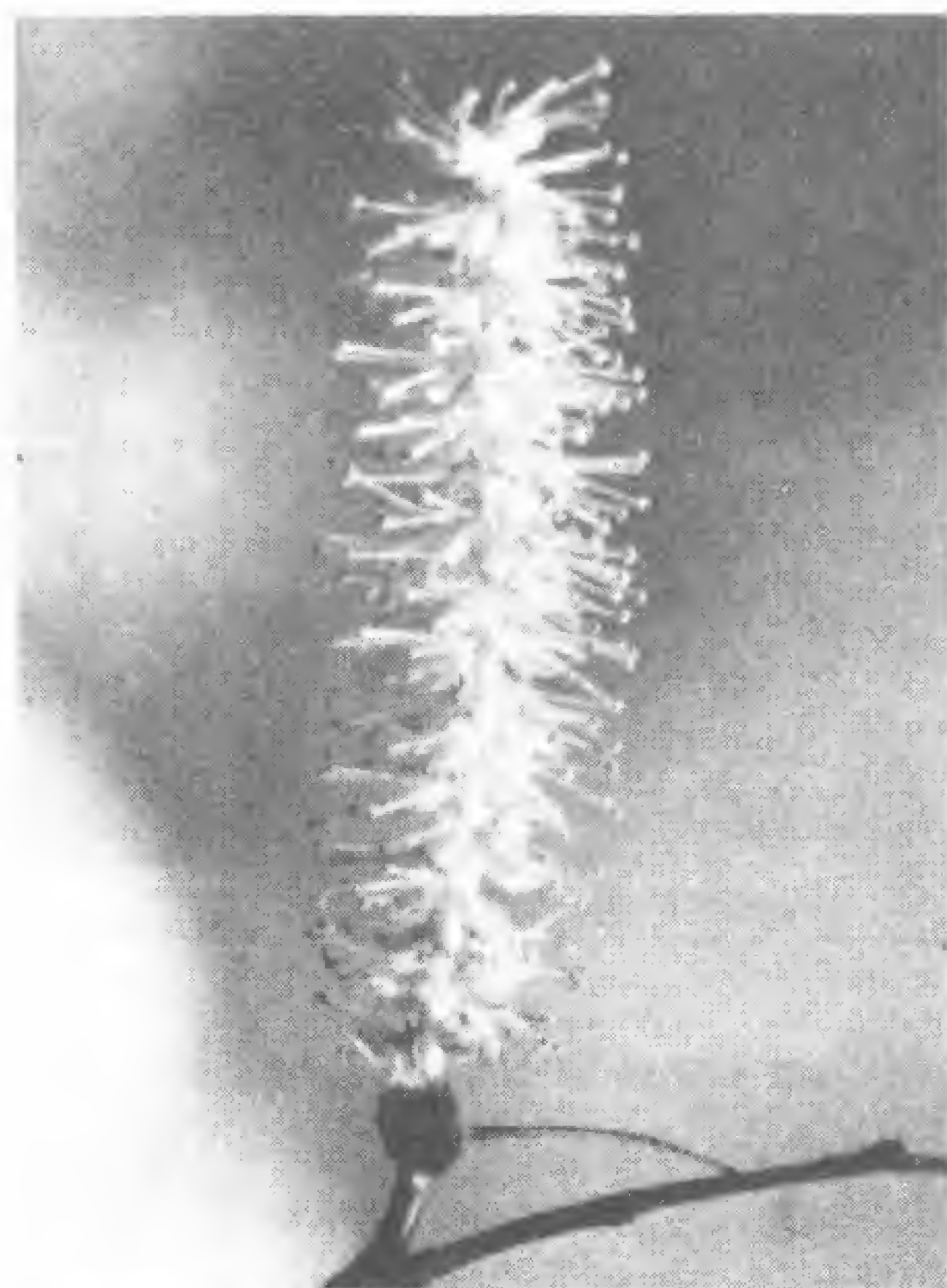


Fig. 76

de las nervaduras, sin concentraciones excesivas de material. Con sólo un pequeño refuerzo de las nervaduras de la base, se adapta de forma adecuada a la distribución de fuerzas.

La figura 75 muestra una explosión lineal en la cual una cuerda entintada se sujeta por sus extremos y se proyecta en su parte media contra un trozo de papel de forma que deje en el mismo una marca lineal. El modelo es una variación lineal de las manchas circulares que aparecen en la figura 77 y recuerda a la espinosa flor del género *Callistemon* de la figura 76. Esta señal de tinta revela muchas cosas acerca de la formación de un diseño en explosión, en particular la forma en que el diseño es afectado por la escala.

A modo de explicación, la figura 77 muestra las señales dejadas por gotas de tinta que han caído desde cuatro alturas distintas. Co-



Fig. 77

menzando desde arriba, vemos las marcas de gotitas desprendidas de un cuentagotas a 7,5 cm, 15 cm, 30 cm y 60 cm (como se observa, cada altura es el doble que la precedente). El diámetro de las manchas no aumenta en la misma proporción, ni siquiera según  $\sqrt{2}$ , como cabría esperar al ser las dimensiones lineales o las áreas de una gota el doble que las de otra. En lugar de ello, el incremento observado es más moderado y las manchas forman espículas, primero en forma de ligeras ondulaciones en la periferia y más tarde como pequeñas protuberancias y abultamientos, para finalmente constituir proyecciones a modo de espinas. En respuesta a su caída desde alturas diferentes, las manchas varían en su forma.

Dejando caer la tinta desde una altura aún mayor no se incrementa de forma apreciable y significativa la duración de las trayecto-



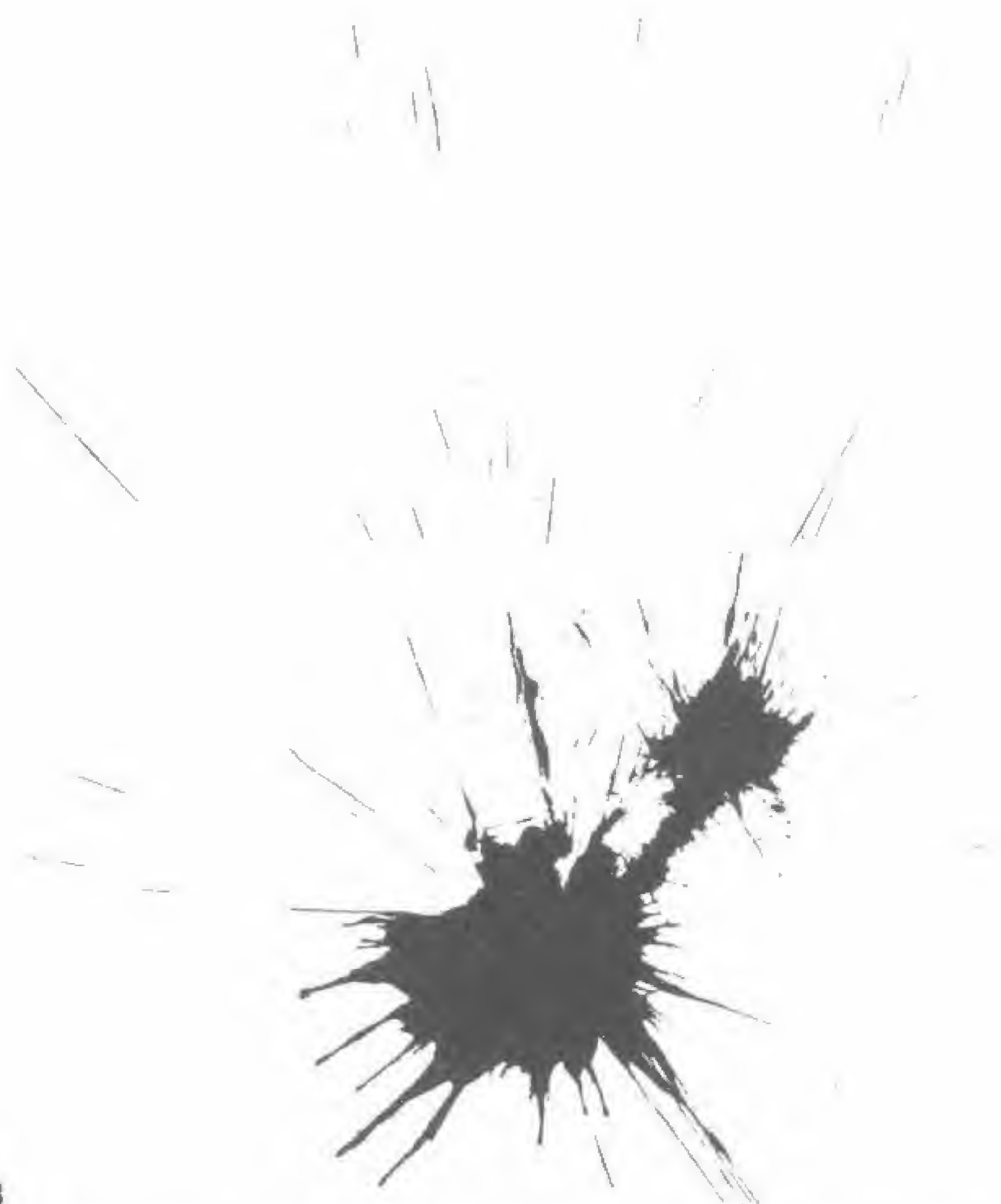


Fig. 78

rias, ya que la gota no puede vencer la resistencia del aire de forma que su caída sea más rápida. Un tejido entintado, proyectado rápidamente, produce rayas muy largas cuando salpica (fig. 78).

En la figura 79 tenemos un ejemplo más. Tomada a una diezmilésima de segundo, esta fotografía de Harold E. Edgerton muestra una gota de leche al caer desde una altura de unos 17 cm sobre un plato que contiene una fina capa también de leche. Es de destacar la bella regularidad de las espinas originadas, que recuerdan la forma de una corona.

El biólogo Paul Weiss ha realizado algunas interesantes observaciones sobre las formas que adoptan estas gotas y manchas. Una espina, tal y como las que se producen en los ejemplos vistos anteriormente, determina al formarse un flujo de líquido de las zonas ve-

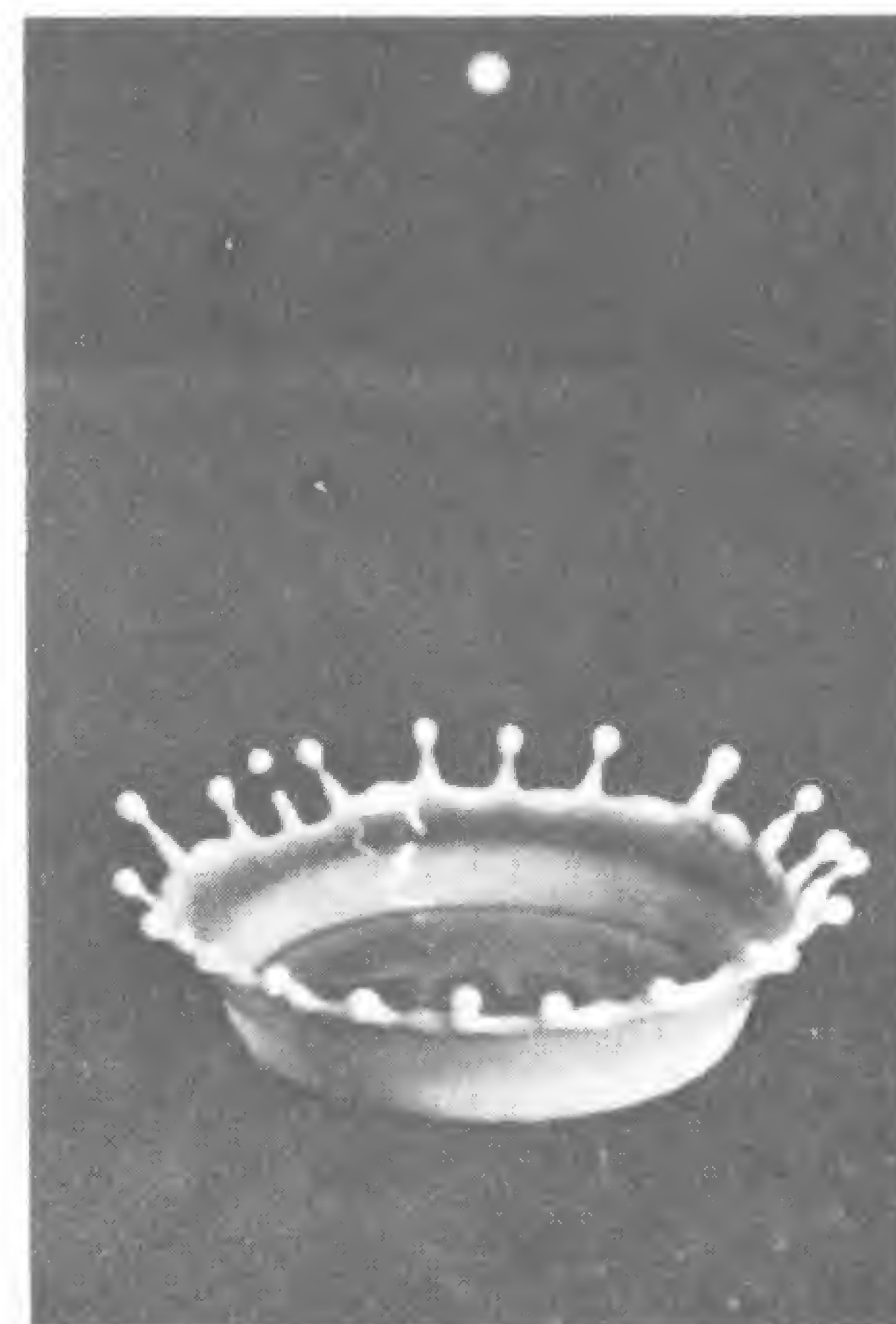


Fig. 79

cinas, en un efecto de succión, de manera que no pueden crearse nuevas espinas en las proximidades de una ya existente. Aquí, según puntualiza Weiss, se halla implicado un importante principio: una área en crecimiento impide que se originen cerca de ella nuevas áreas de crecimiento y un factor que estimule dicho crecimiento favorece la formación de zonas que crecen más rápidamente, como espinas u otro tipo de proyecciones, a expensas de zonas que lo hacen con mayor lentitud, como las regiones situadas entre las proyecciones en cuestión. Weiss aduce que, al igual que al caer la tinta desde una mayor altura estimula el crecimiento de las proyecciones a expensas del resto del perímetro, «una temperatura más elevada induce el crecimiento de miembros y apéndices en los animales, más que el de la masa corporal de éstos: hocicos, patas y colas de ratas y rato-





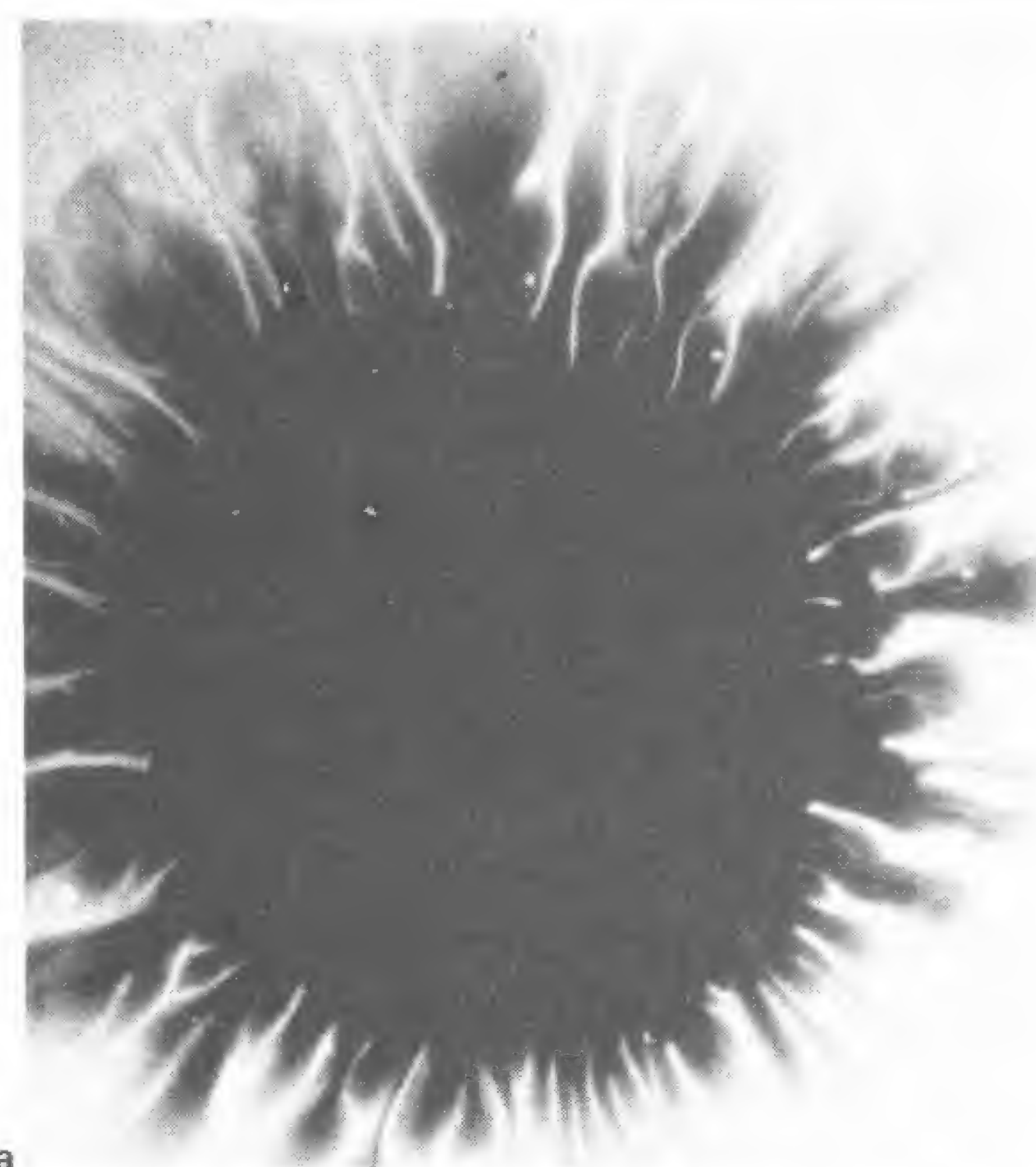
Fig. 80

nes se alargan en ambientes cálidos y no sólo de forma absoluta sino también en relación con el tamaño del cuerpo, en mayor proporción de lo que lo hacen las partes correspondientes en especímenes criados en ambientes fríos».

Así, al tiempo que el borrón de tinta aumenta de tamaño en respuesta a un incremento en la velocidad de su caída, también varía su forma: añade espinas o proyecciones espiculares a su perímetro de una manera regular. Algo análogo ocurre en los seres vivos: a medida que aumenta su tamaño en respuesta a las condiciones ambientales, también modifican sus formas: sus perímetros y superficies se incrementan asimismo regularmente.

El modelo de explosión es en realidad el primero de los diseños estudiados hasta ahora que presenta ramificaciones: constituye un tipo de diseño ramificado eficiente en el sentido de que es directo, pero poco eficaz en cuanto a minimizar la longitud total de su recorrido. Una forma en explosión de carácter simple puede verse en el cardo de la figura 80, en el que una distribución uniforme de pequeñas espinas incrementa la superficie.

La figura 81 muestra ejemplos de mayor complejidad. En la figura 81a, un poco de tinta caída en un medio con glicerina difunde hacia la periferia para formar tentáculos ondulantes. La forma de la gota proviene de la constitución de una interfase estable entre la tinta



a

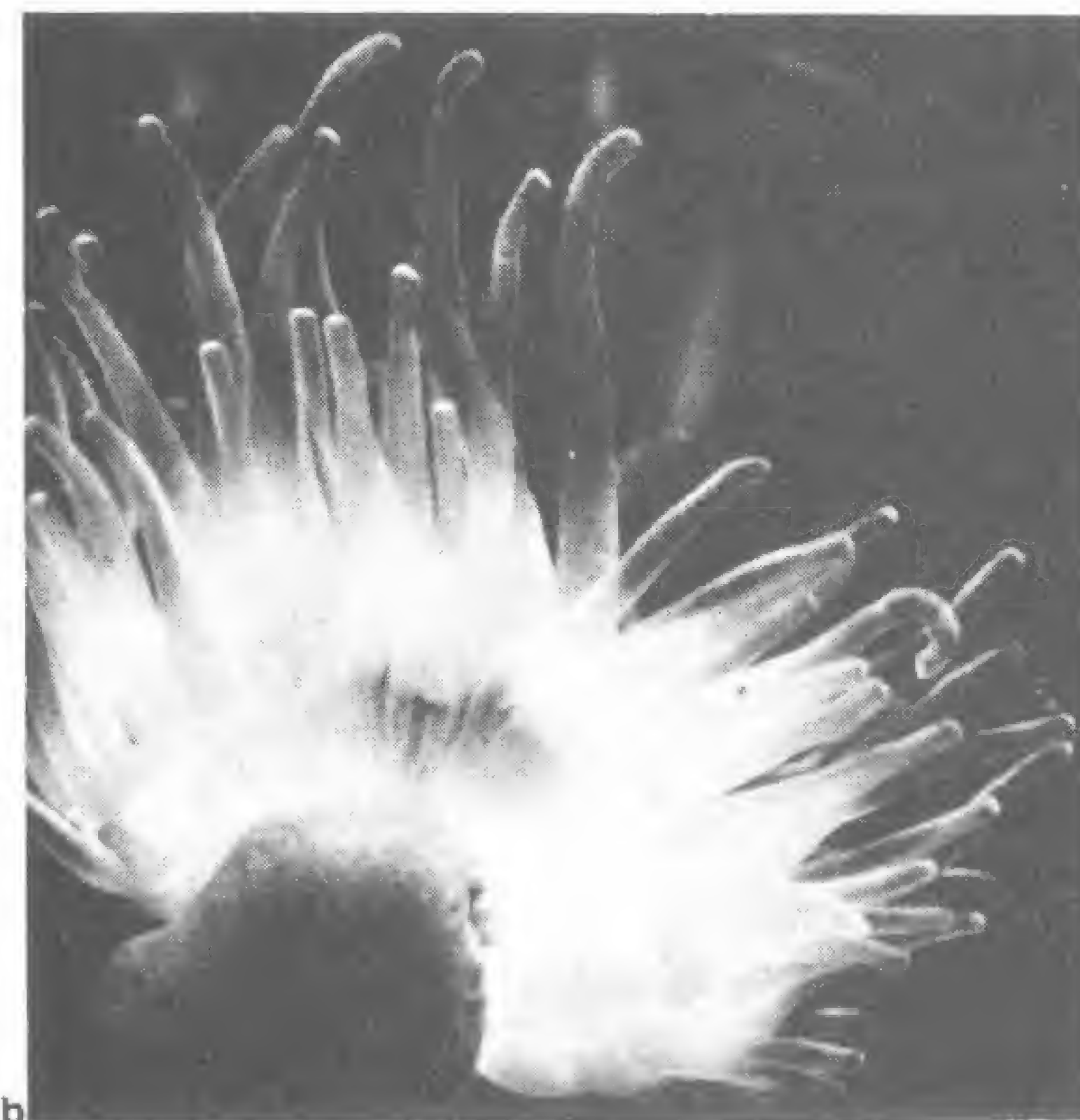


Fig. 81

b



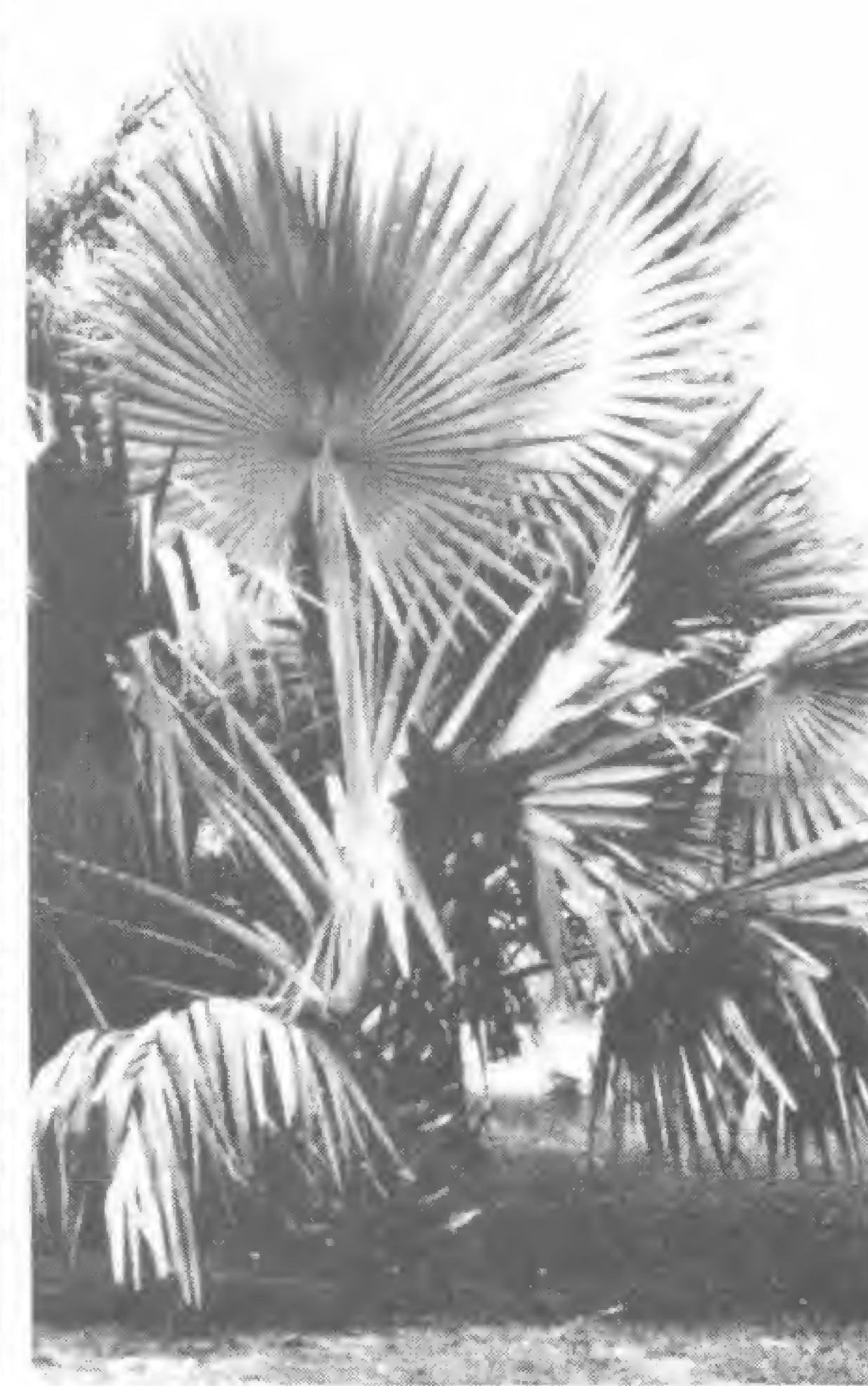
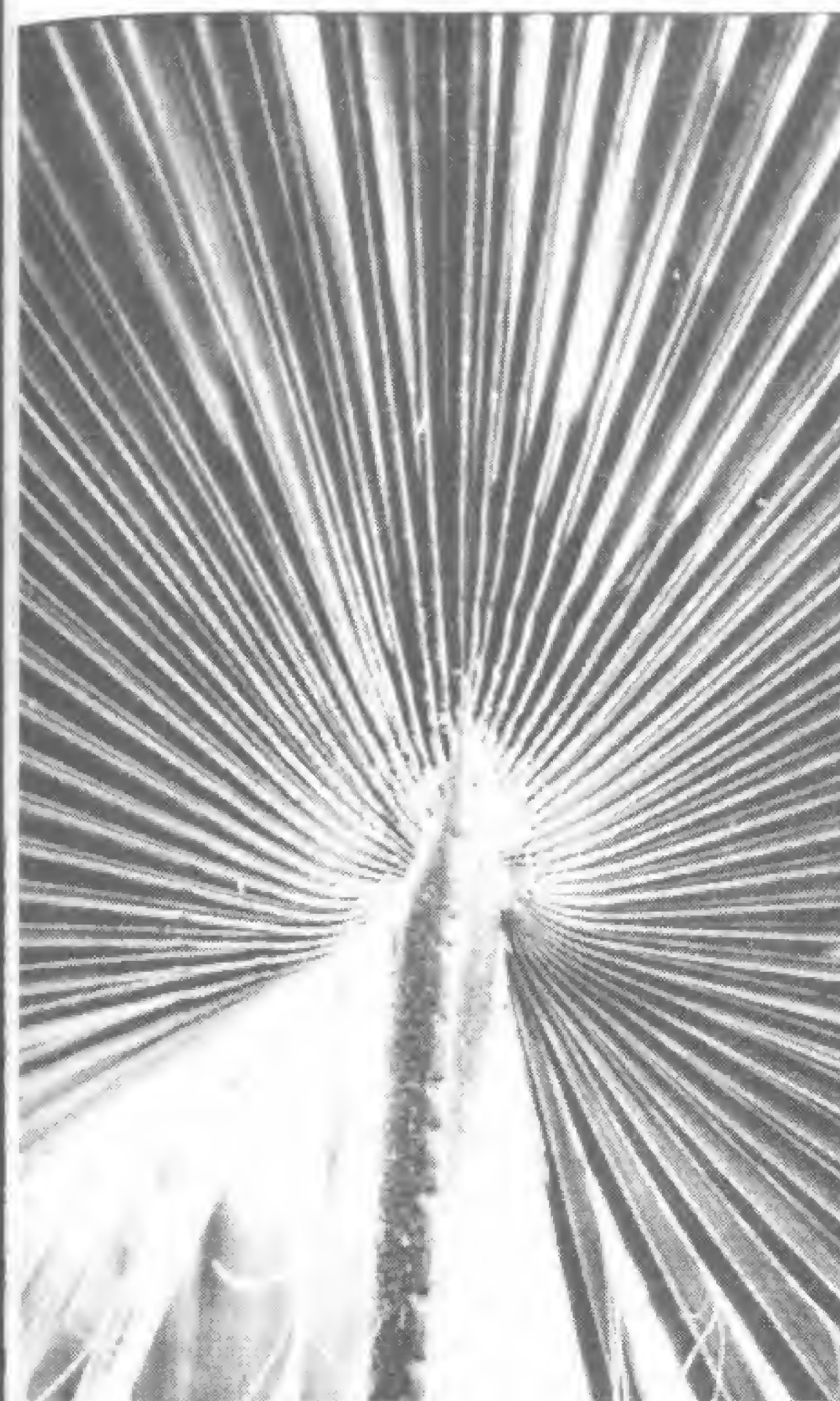
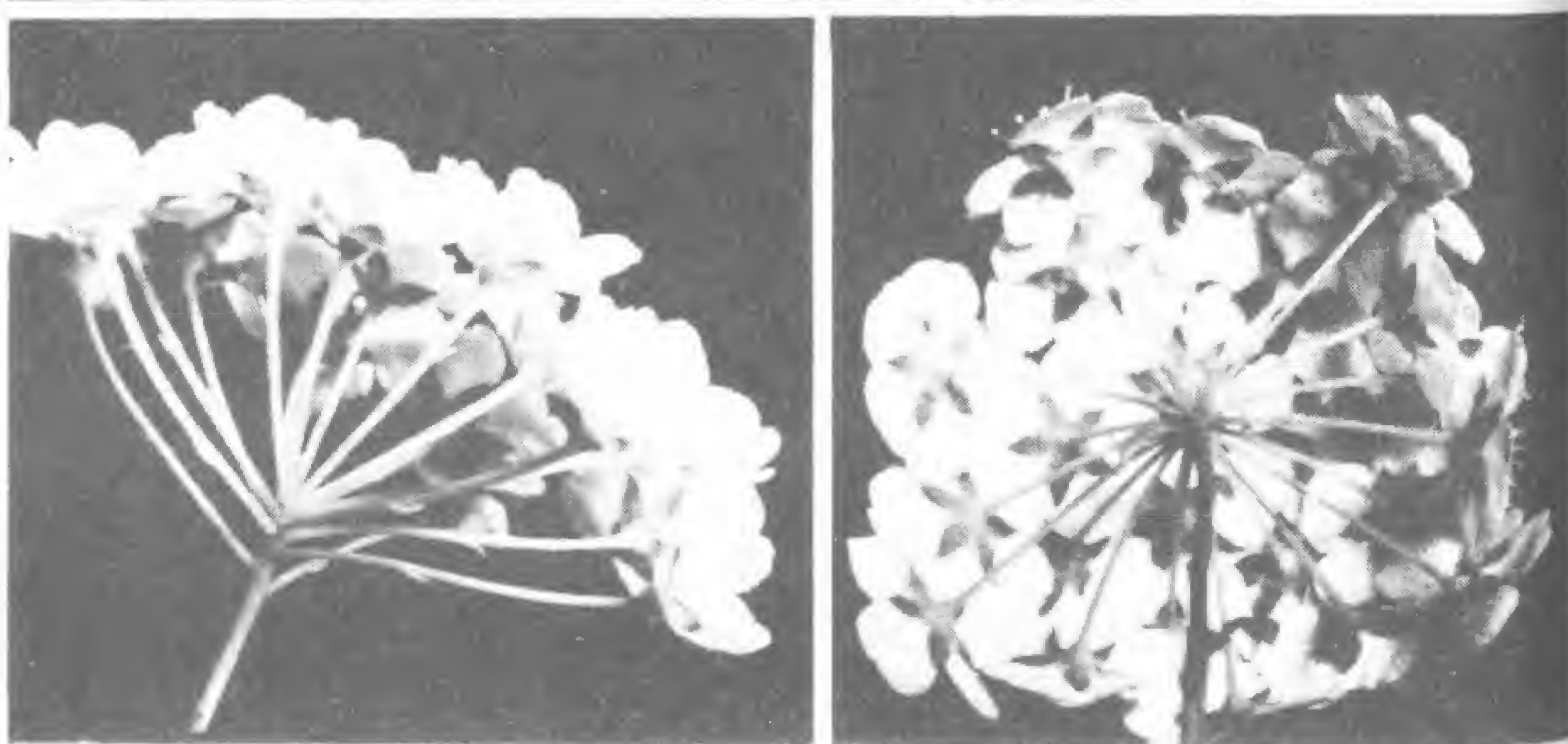
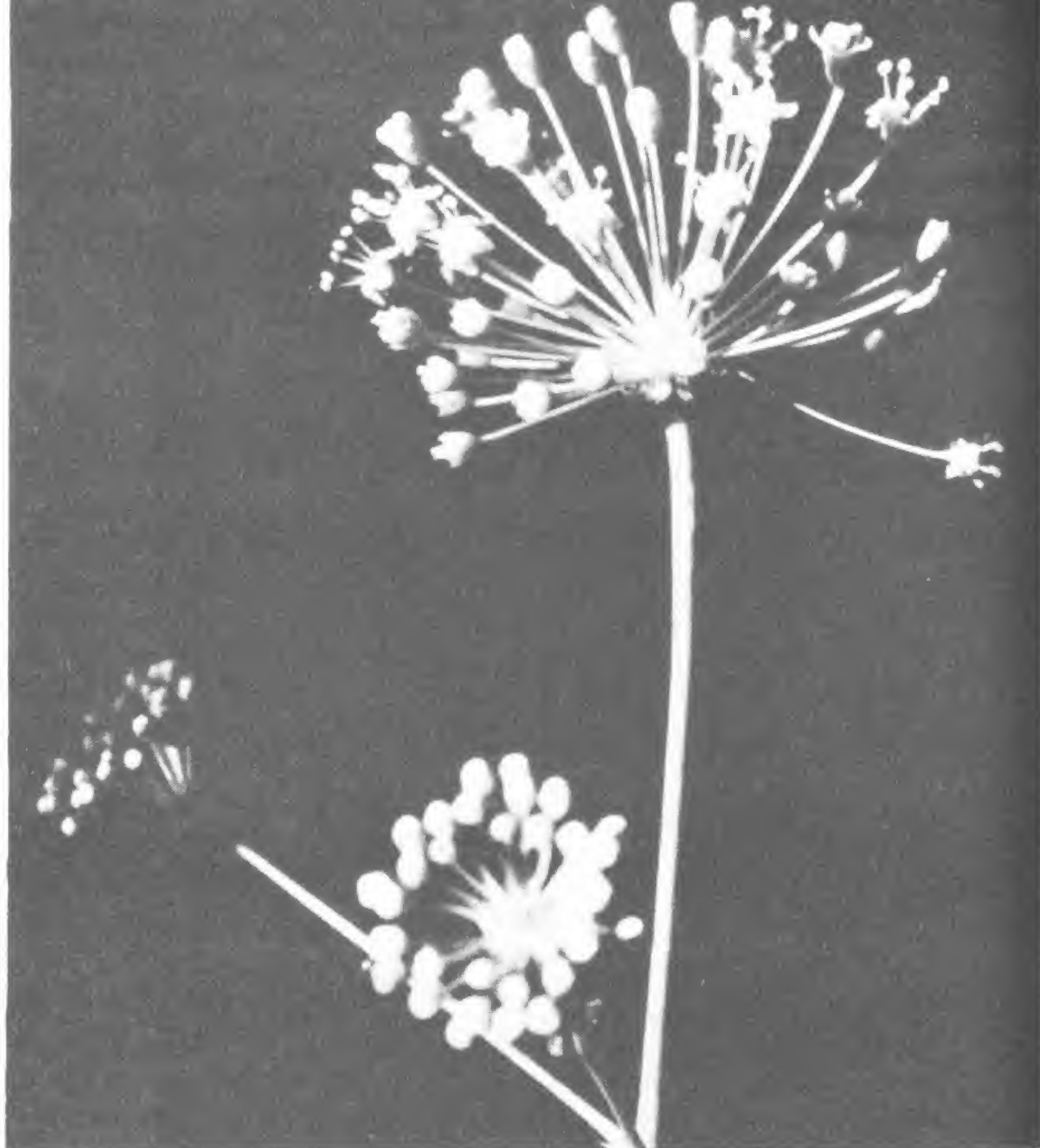


Fig. 83

y la glicerina, al menos temporalmente. La escasa diferencia de densidad existente entre una sustancia y otra hace que el comportamiento de esta interfase sea muy similar al de la anémona que puede verse en la figura 81b (compuesta en su mayor parte de agua) y el medio marino. La interfase en este último caso obedece en parte a causas genéticas u otras distintas, pero no necesariamente a la difusión, como sucede en la tinta. Así, la anémona y la mancha de tinta presentan una forma muy parecida debido a que ambas son expresiones del equilibrio existente entre dos «fluidos» de densidad muy semejante, y no a que posean un mecanismo de crecimiento similar.

Las trayectorias de la explosión pueden acabar a su vez en otras explosiones, como sucede en los cohetes que estallan en la noche

◀ Fig. 82



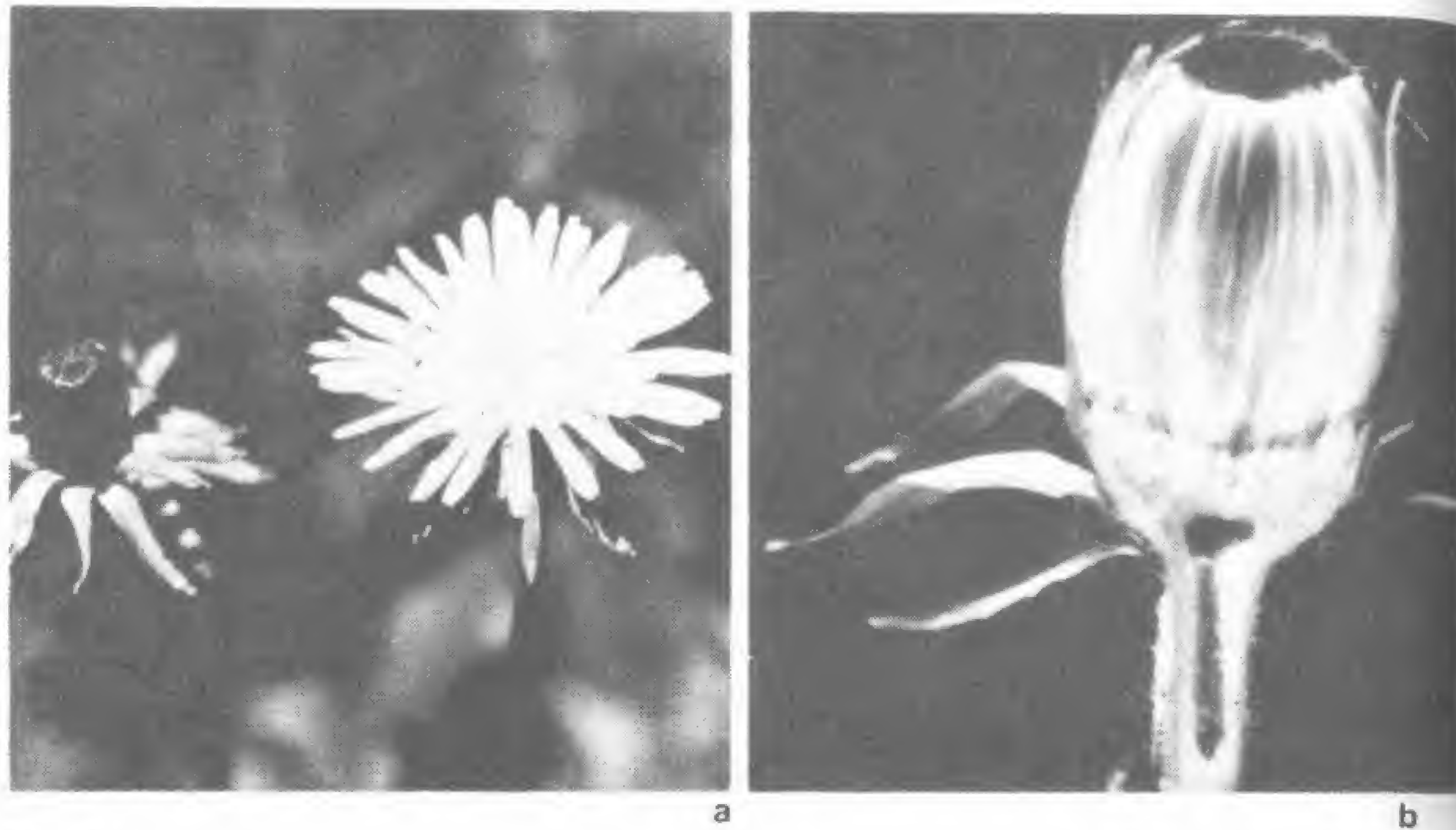
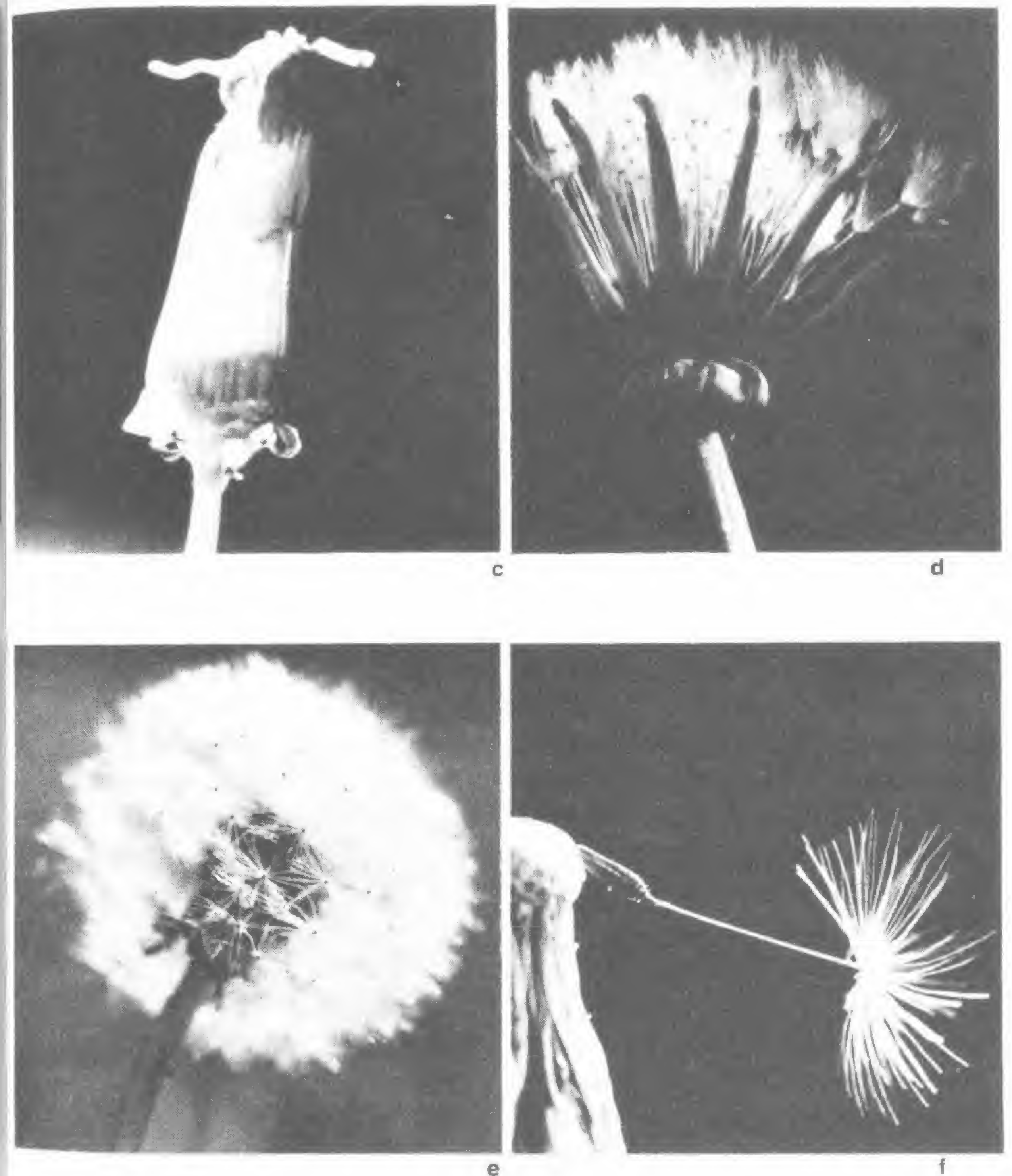


Fig. 84

produciendo una cascada de fuegos artificiales en el cielo, o en el caso del material proyectado por un cráter lunar en el momento de su formación, que a su vez produce nuevos cráteres. El prototipo de estas explosiones compuestas puede verse en la figura 25a y, como ya hemos observado, si bien es algo más indirecto que el modelo simple (aunque algunas de las trayectorias de ciertos puntos son más largas que en éste), su longitud total es sensiblemente menor.

Como indican las figuras 82, 83 y 84, muchas plantas crecen según un modelo de explosión compuesta. La figura 82 muestra la umbela de una aralia (*Aralia hispida*), similar a una sucesión de cohetes que estallaran. Cada una de las ramas de las distintas inflorescencias se abre a su vez en un nuevo ramillete. Vemos el mismo diseño en la espírea, en la que cada rama se divide para formar una corola. Estas ramificaciones resultan particularmente visibles cuando observamos la inflorescencia desde abajo.

En la *Bismarckia nobilis* de la figura 83 (fotografiada en el Fairchild Tropical Gardens de Miami, Florida), los folíolos de la hoja bro-





tan de un centro común, al igual que lo hacen las propias hojas.

El diente de león sigue el mismo diseño. En la figura 84a vemos una flor abierta y un capullo. En la figura 84b se muestra una sección de dicho capullo, con todos los pétalos agrupados dispuestos a abrirse en la floración. En la figura 84c, contemplamos la flor una vez marchitos sus pétalos. Los restos de algunos de ellos pueden apreciarse en la parte superior de la fotografía; debajo de los mismos aparecen los vilanos ya desarrollados. Al abrirse, estos vilanos forman una delicada esfera dispuesta a recibir el soplo de un niño (fig. 84d y e). En la figura 84f, sólo un vilano permanece unido a lo que fue la flor. La semilla repite el diseño del conjunto: se ramifica en su extremo superior en un penacho de hilillos.

## 5. MODELOS DE RAMIFICACIÓN

En el capítulo 2 vimos que las propiedades geométricas de los modelos abstractos de líneas o puntos servían de gran ayuda para comprender las formas que se presentan en la Naturaleza. En el presente capítulo desarrollaremos algunos diseños abstractos más. Quizá ciertos lectores encuentren el estudio de modelos generales algo tedioso y quisieran proseguir con ejemplos concretos tomados directamente de la Naturaleza, pero las conclusiones y enseñanzas que se hallan tras estos modelos son sin duda apasionantes. La principal conclusión es ésta: los modelos abstractos, ya se trate de simples garabatos, delicadas obras de arte o análisis matemáticos, son análogos a los que la Naturaleza crea en virtud de la interacción de diferentes sistemas físicos. Todos los diseños posibles, tanto los ejecutados por artistas, los calculados por los matemáticos o los producidos por las fuerzas naturales, deben su forma al mismo entorno espacial: todos se hallan bajo las férreas imposiciones del espacio. Los diseños sintéticos de líneas y puntos se atienen a su propia lógica, pero, lo que es más importante, nos muestran con elocuencia el orden que todas las cosas comparten de forma inevitable.

He aquí algunas de las cuestiones que nuestros modelos pueden ayudar a responder: los árboles presentan un corto número de ramas de grandes proporciones que se dividen a su vez en otras más pequeñas, mas ¿cuál es el orden de estas ramas? ¿Qué relación existe entre el tamaño de las ramas más grandes y el de las menores? ¿Por qué los ríos y arroyos y las descargas eléctricas del rayo se ramifican de



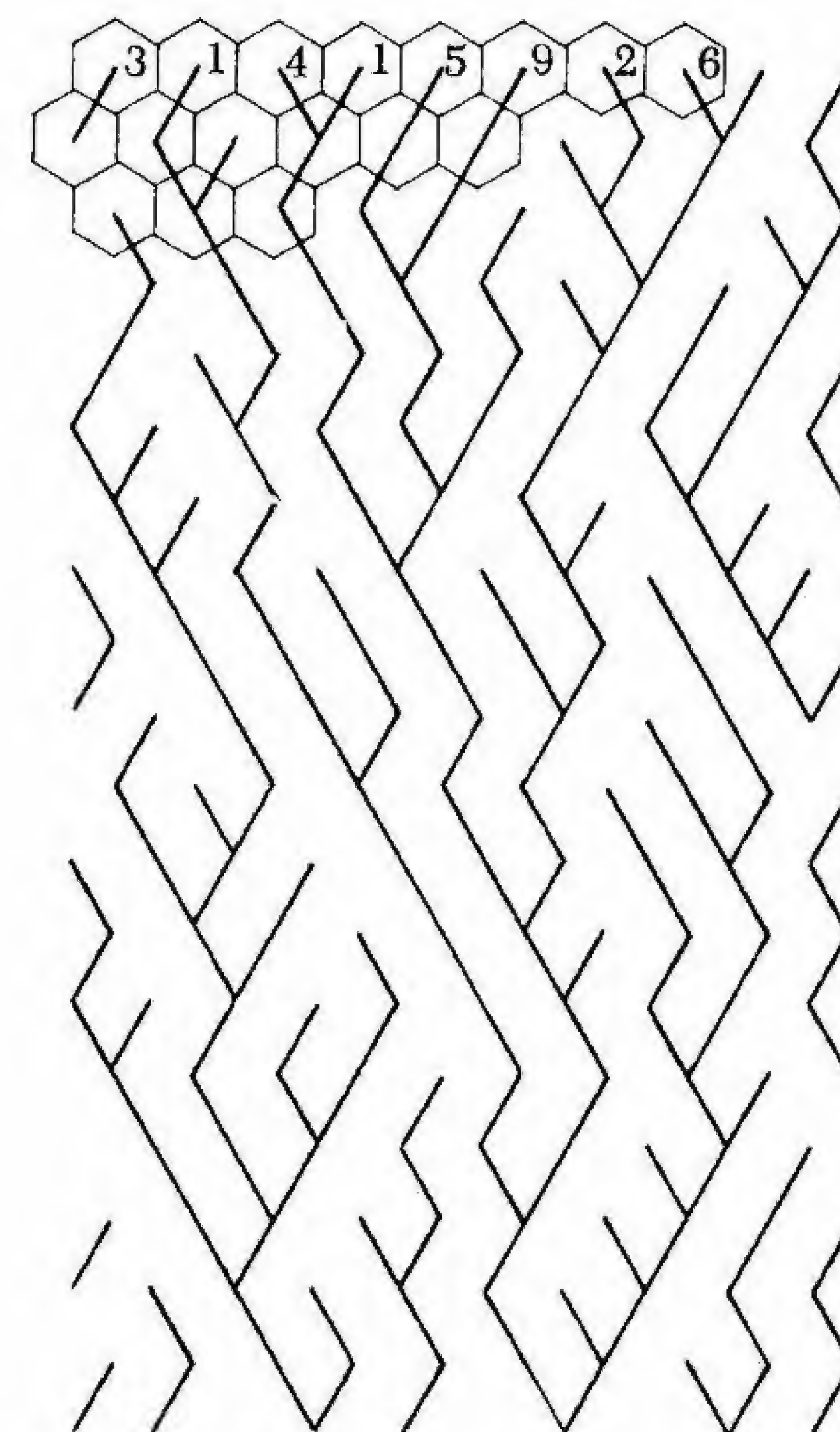
forma similar a como lo hacen los árboles? ¿Por qué tantos sistemas, en los más variados niveles de organización, crecen por la adición de partes cada vez más pequeñas?

### Ramificación al azar en ríos y árboles

He aquí otra cuestión: cuando la lluvia cae de manera uniforme sobre un terreno en suave pendiente ¿qué tipo de sistema se forma como resultado de la unión de los diversos cursos de agua originados?

No es posible responder de una manera precisa a esta pregunta, ya que son muchos los factores que influyen en la dirección del caudal de agua dentro de una red o sistema de esta clase: topografía, vegetación, régimen de precipitaciones, geología, acción de la fuerza centrífuga en las curvas y recodos, etc. Además, estos factores interaccionan de una forma compleja, lo que hace aún más difícil dar una contestación exacta. Pero aunque no podemos predecir el tipo de sistema concreto que se originará, no tenemos por qué sentirnos totalmente frustrados. Si asumimos que la dirección del flujo en diferentes puntos está determinada al azar (de forma similar a como hicimos para las velocidades en un flujo turbulento), estamos en condiciones de describir las características generales del sistema en cuestión. Y aún más, es posible obtener descripciones generales de estos sistemas mediante la creación de modelos artificiales de flujo. Así, por ejemplo, si diseñamos un mosaico de hexágonos iguales y asignamos después una serie de números escogidos al azar (tales como los dígitos de  $\pi$ ) para determinar las direcciones de flujo en el interior de los hexágonos, la mayor parte de estos flujos establecidos aleatoriamente se unirán entre sí para formar una red ramificada.

La figura 85 muestra redes generadas de esta forma. En realidad, en la figura se representan únicamente unas pocas celdillas hexagonales, por motivos de claridad, así como sólo unos cuantos dígitos de  $\pi$ . Al igual que en las tres primeras filas que sirven de ejemplo, en las restantes se han utilizado también otras celdillas y otros dígitos para formar el modelo completo, y todas las celdillas se hallan interconectadas por medio de líneas ramificadas, según la siguiente regla: si el dígito de una celdilla dada es par, el centro de la misma se une



**Fig. 85**

con el de la celdilla situada inmediatamente debajo y a la derecha; si es impar, lo hace con el centro de la celdilla que se encuentra también debajo pero a la izquierda, como puede comprobarse en la figura. El modelo resultante puede ampliarse de manera indefinida en cualquier dirección utilizando un mayor número de dígitos en una serie más larga. Aunque los detalles de un modelo mayor pueden diferir de los de nuestra figura, el aspecto general del mismo sería muy similar. En la figura 86 aparece la mayor de las redes unificadas que componen la figura 85.

La figura 87 muestra una interconexión entre las celdillas ligeramente distinta. Los dígitos se asignan como en el caso anterior y la



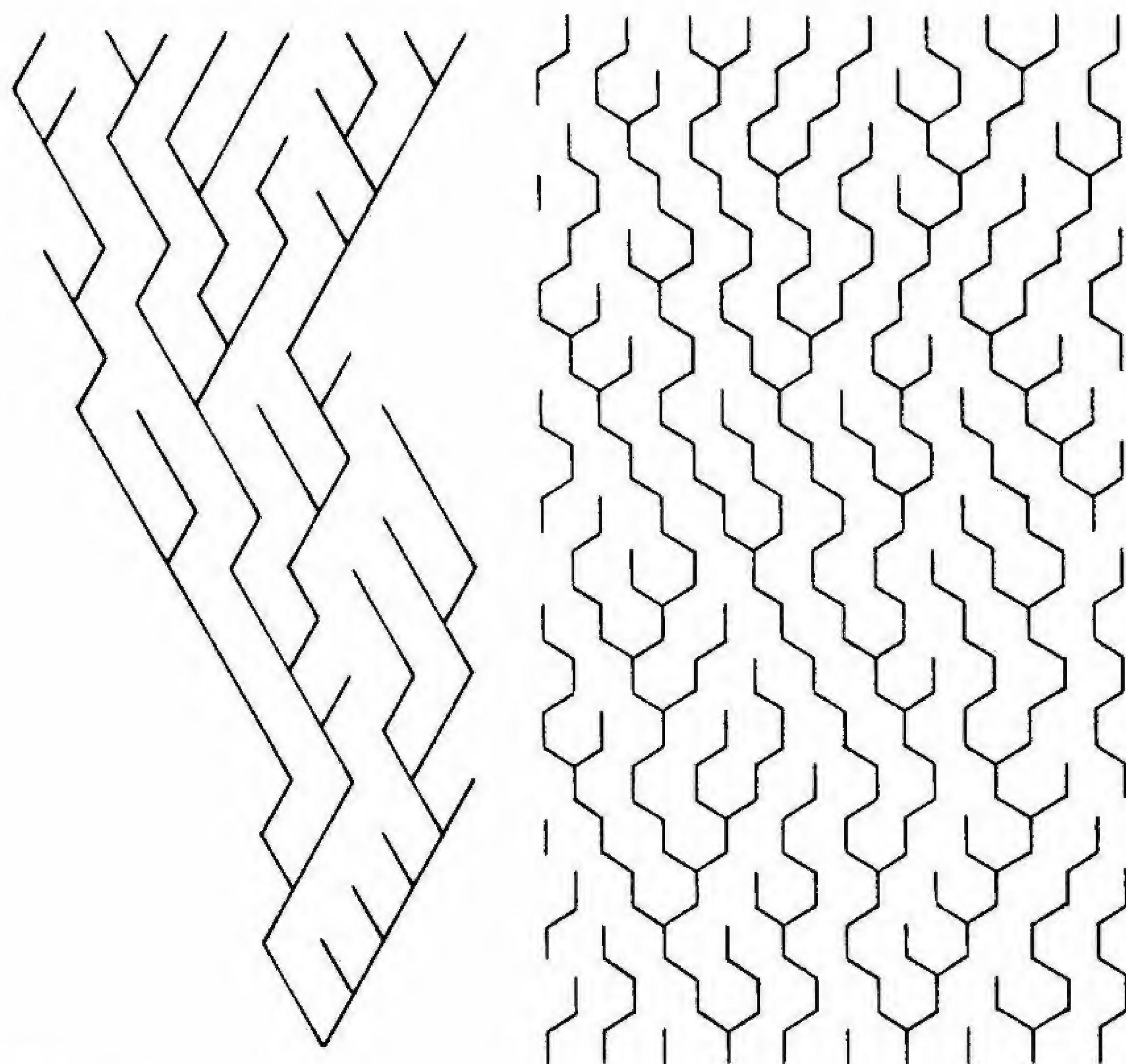


Fig. 86

Fig. 87

regla seguida es la misma, pero las líneas de conexión discurren aquí a lo largo del perímetro de las celdillas y no a través de sus centros. La figura 88 representa a su vez el árbol mayor incluido en el diseño. Topológicamente, con respecto al número de puntos, líneas y uniones, este árbol es idéntico al de la figura 86, aunque su aspecto visual, debido a que los ángulos y longitud de las líneas son diferentes, difiere bastante del anterior.

Cuando Luna B. Leopold formó una serie de modelos de ramificaciones a partir de números escogidos al azar, descubrió que los diseños resultantes eran muy similares a los presentados por los siste-

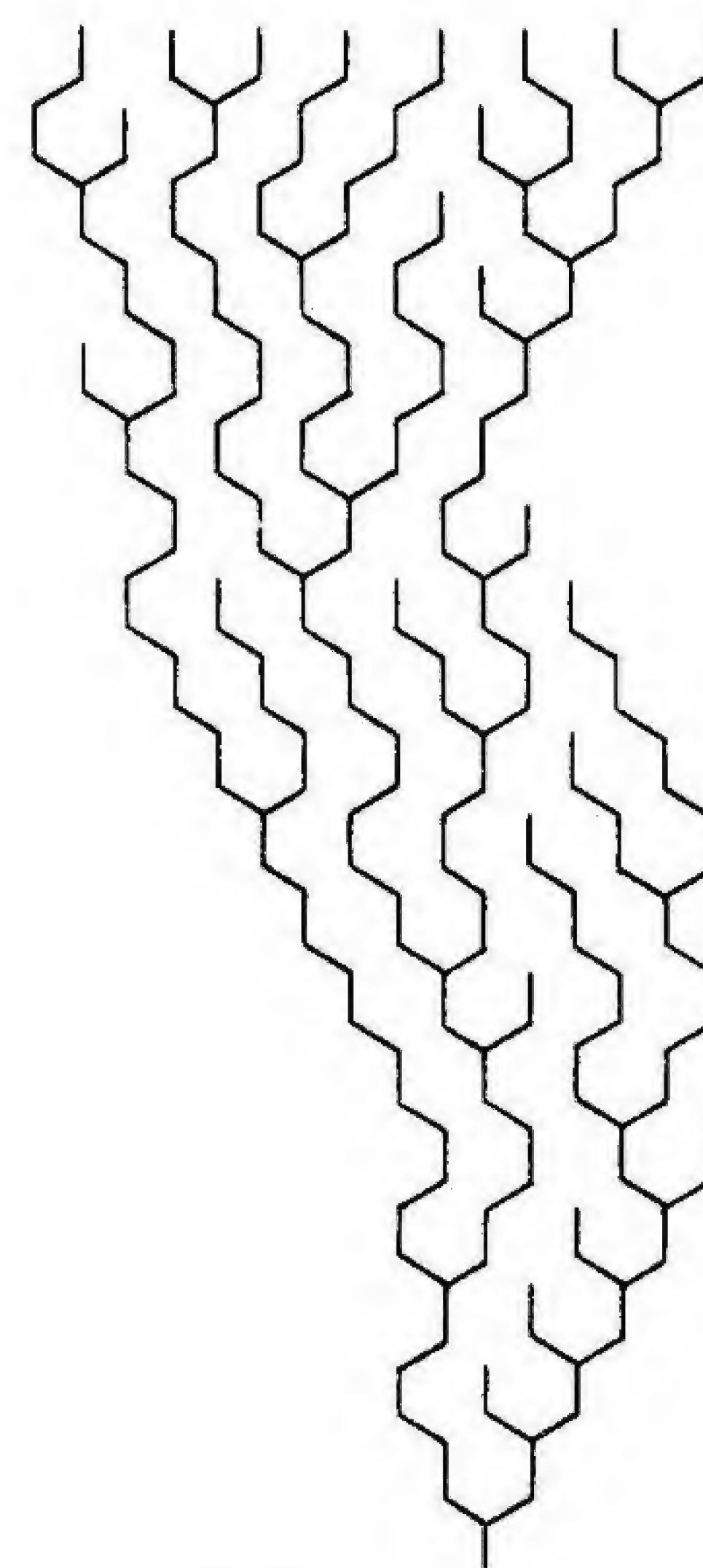


Fig. 88

mas fluviales en la Naturaleza. Aunque nuestros diseños han sido generados de forma distinta, veamos si también se parecen a los de los ríos. Para llevar a cabo esta comparación, utilizaremos el método de análisis de Horton en el estudio de los diseños. Éste es un método clásico para analizar sistemas fluviales, que fue empleado primeramente por el ingeniero Robert E. Horton (y más tarde modificado por A. N. Strahler).

Este método divide un sistema fluvial en cursos de primer, segundo, tercer, etc., órdenes, de acuerdo con la regla de que un curso de orden superior sólo puede ser alimentado por otros de orden infe-



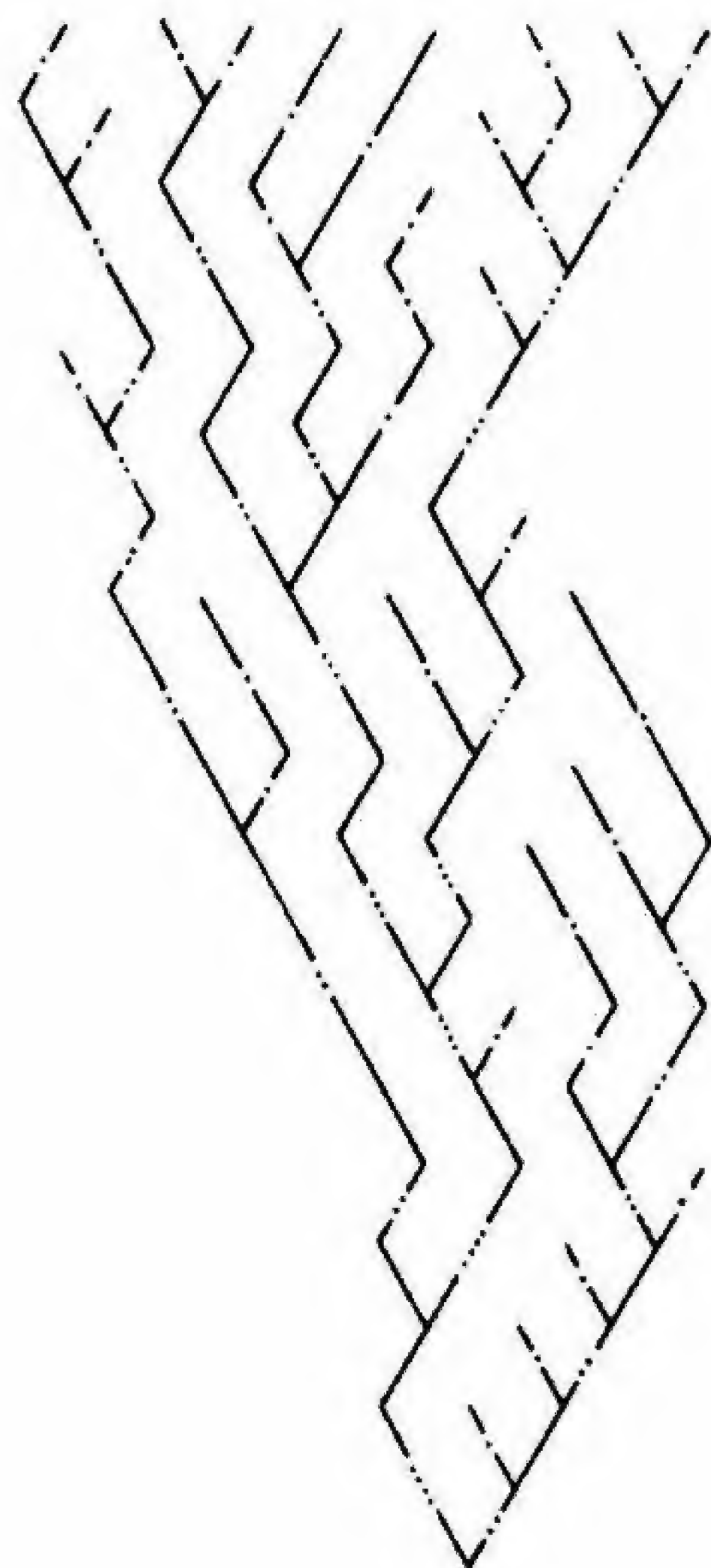


Fig. 89

rior. Así, un curso de primer orden, que nace como una fuente, no recibe afluente alguno; uno de segundo orden, que se forma de la unión de dos de primer orden, recibe sólo cursos de primer orden, uno de tercer orden, originado por la unión de dos cursos de segundo orden, recibe únicamente caudal procedente de cursos de primer y segundo órdenes, y así sucesivamente. En las cuencas fluviales reales, los cursos de un orden dado resultan ser de tres a cinco veces más numerosos que los del orden que le sigue. En otras palabras, en un sistema determinado, los cursos de primer orden son unas cuatro veces más comunes que los de segundo orden, los cuales, a su vez,

son cuatro veces más numerosos que los de tercer orden. ¿Cómo comparar nuestros modelos generados de forma aleatoria con estos resultados estadísticos?

Si en la figura 89 volvemos a representar el diseño de la figura 86 e indicamos mediante líneas con un único punto en su parte media las ramas de primer orden, que no poseen tributarios, mediante líneas con dos puntos en su porción media las ramas de segundo orden, formadas por la unión de dos ramas de primer orden, y así sucesivamente, obtenemos 24 ramas de primer orden, 6 de segundo orden y 2 de tercer orden. Esto demuestra, como Horton observó en los cursos naturales, que las ramas de cada orden son de tres a cinco veces más numerosas que las del orden siguiente. Un análisis de la red de la figura 88 da como resultado las mismas proporciones, puesto que las bifurcaciones se realizan de idéntica forma.

Aún percibimos otra tendencia en el diseño de la figura 89: los cursos de orden superior tienden a ser más largos que los de orden inferior, tendencia que corresponde a lo que ocurre también en los ríos. Este hecho permite a los hidrogeólogos estimar las longitudes totales de todos los cursos de una determinada cuenca hidrográfica una vez establecido el número de órdenes de ésta. Basándose en estos cálculos, postulan la existencia de más de 5.200.000 km de cauces fluviales en Estados Unidos.

Horton descubrió igualmente que el área de drenaje estaba asimismo relacionada con el orden del curso y que la longitud del cauce de un río principal ( $L$ ) es, por término medio, 1,4 veces el área de drenaje ( $A$ ) efectiva, elevada a  $2/3$ , como indica la siguiente fórmula:

$$L = 1,4 A^{2/3}$$

En las cuencas hidrográficas reales, el factor 1,4 varía entre 1 y 2,5, y el exponente, entre 0,6 y 0,7. Dentro de estos límites, el modelo de la figura 89 también sigue la fórmula anterior.

El exponente  $2/3$  de la fórmula empírica revela aún más datos acerca de la forma de los ríos. Si dicho exponente valiera  $1/2$ , es decir, si la longitud del sistema fluvial fuera proporcional a la raíz cuadrada del área de drenaje, la forma de la cuenca sería idéntica tanto para ríos grandes como para ríos pequeños. Un exponente superior



a  $1/2$ , como es  $2/3$ , indica por el contrario que la cuenca de un río grande tiende a ser larga y estrecha, mientras que la de uno pequeño será corta y ancha. Así, hallamos que un cambio de tamaño va acompañado de una variación en la forma. Y, hecho en verdad interesante, las nerviaciones de las hojas muestran una tendencia análoga, a saber, las hojas más grandes tienden a ser más alargadas. La larga hoja del platanero contrasta con las hojas pequeñas y redondeadas del arándano.

Si construyéramos grandes series de hexágonos y los uniéramos según nuestra regla, los índices de bifurcación y las relaciones entre la longitud y el área no corresponderían de forma exacta a los de los cursos naturales. Los modelos artificiales, en los cuales el flujo tiene sólo dos opciones (circular hacia abajo e ir o bien a la derecha o a la izquierda), presentan un desarrollo demasiado largo y estrecho y

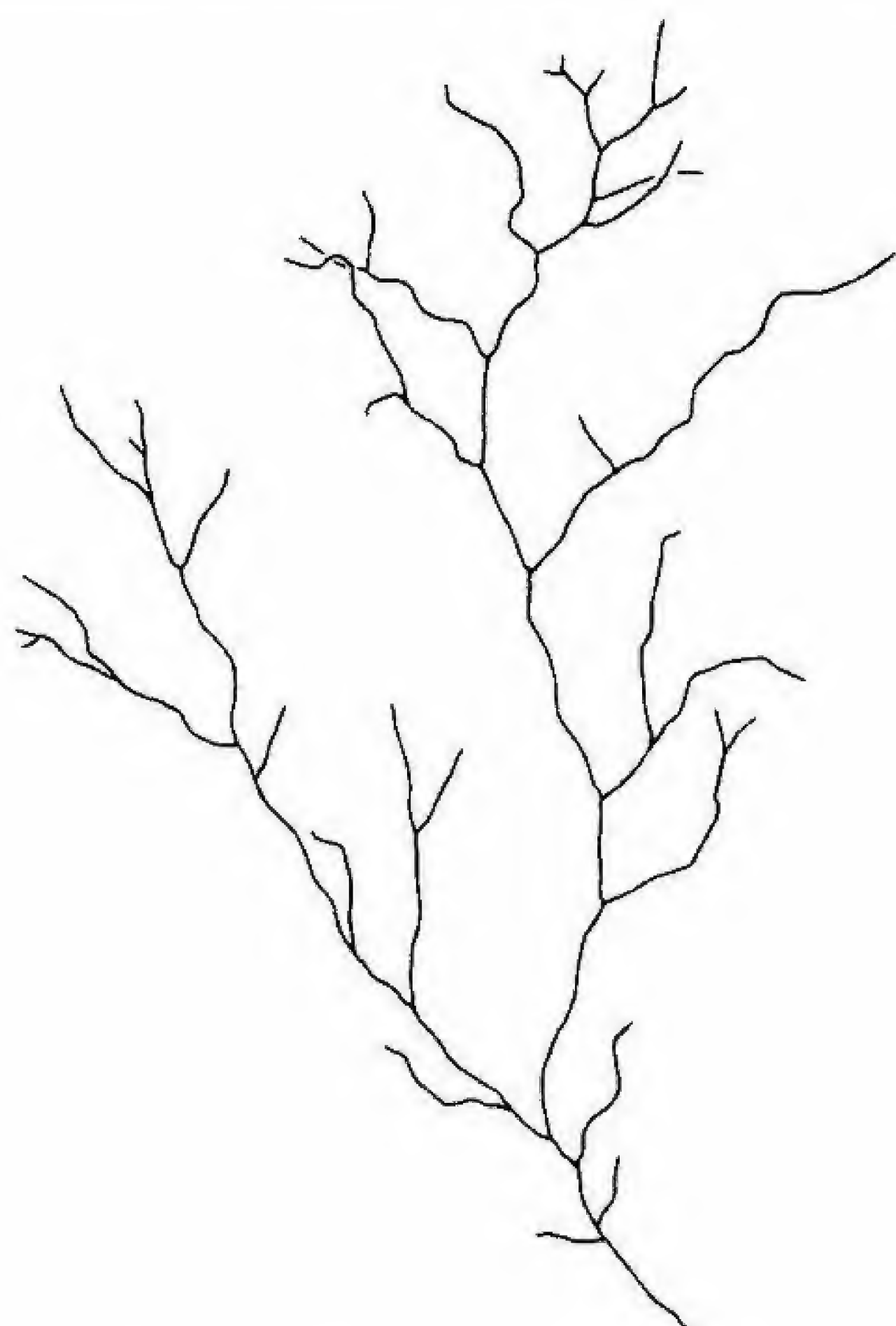


Fig. 90

no se extienden en anchura con la suficiente amplitud. Los ríos reales en sistemas fluviales también reales tienen mayor número de opciones. Sin embargo, encontramos que el modelo de la figura 89 se parece superficialmente y actúa estadísticamente como una pequeña cuenca fluvial.

La figura 90 presenta una copia en dibujo de una fotografía de un rayo; éste es en la realidad tridimensional, por supuesto, pero un análisis de Horton de su proyección bidimensional en la figura revela los mismos índices de bifurcación que encontramos en un sistema fluvial. En concreto, hallamos en el rayo 33 ramas de primer orden, 10 de segundo y 2 de tercero. Las proporciones entre los órdenes primero y segundo y entre los órdenes segundo y tercero son de 3,3 y de 5,0, respectivamente, lo que se sitúa dentro del intervalo esperado de 3 a 5. Nuestra muestra es demasiado pequeña como para permitirnos establecer conclusiones definitivas acerca del paralelismo existente entre los diseños exhibidos por rayos y ríos. Sin embargo, investigadores como Michael Woldenberg están difundiendo este tipo de análisis. Woldenberg ha determinado índices de bifurcación y otros parámetros estadísticos en los árboles bronquiales de los pulmones humanos, en la ramificación vascular de hígados de ovejas, en áreas de mercado dentro de estudios económicos, en arroyos y en descargas eléctricas (como la de la figura 91). En toda esta variedad de sistemas se han hallado jerarquías similares con respecto a los distintos órdenes de ramificación.

Las representaciones de Lichtenberg de la figura 91 se forman cuando bloques de plástico se cargan de electricidad estática y su superficie se rompe en un punto. La electricidad escapa entonces repentinamente y da lugar a bellas formas ramificadas. El modelo obtenido en a se ha conseguido agujereando el borde inferior del bloque de plástico, mientras que el representado en b se ha logrado perforando la superficie delantera. Estadísticamente, con respecto a los órdenes de ramificación, estos diseños son similares a los que constituyen las redes fluviales.

Sin pretender entrar en detalles de tipo analítico, descubrimos así que muchos fenómenos distintos presentan ramificaciones muy semejantes. Una y otra vez, las ramas de orden inferior resultan ser más cortas y numerosas que las de orden superior.



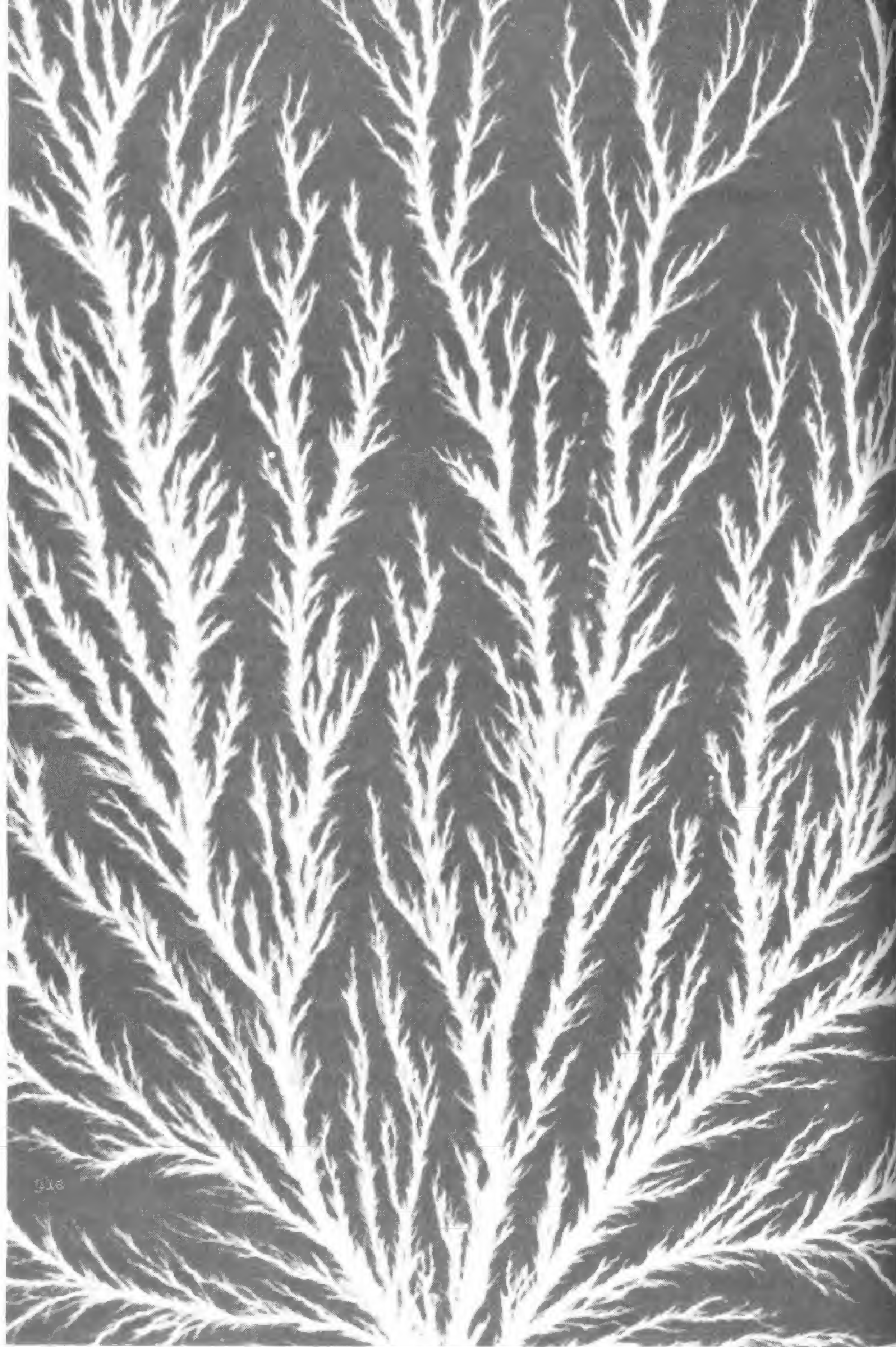


Fig. 91 a

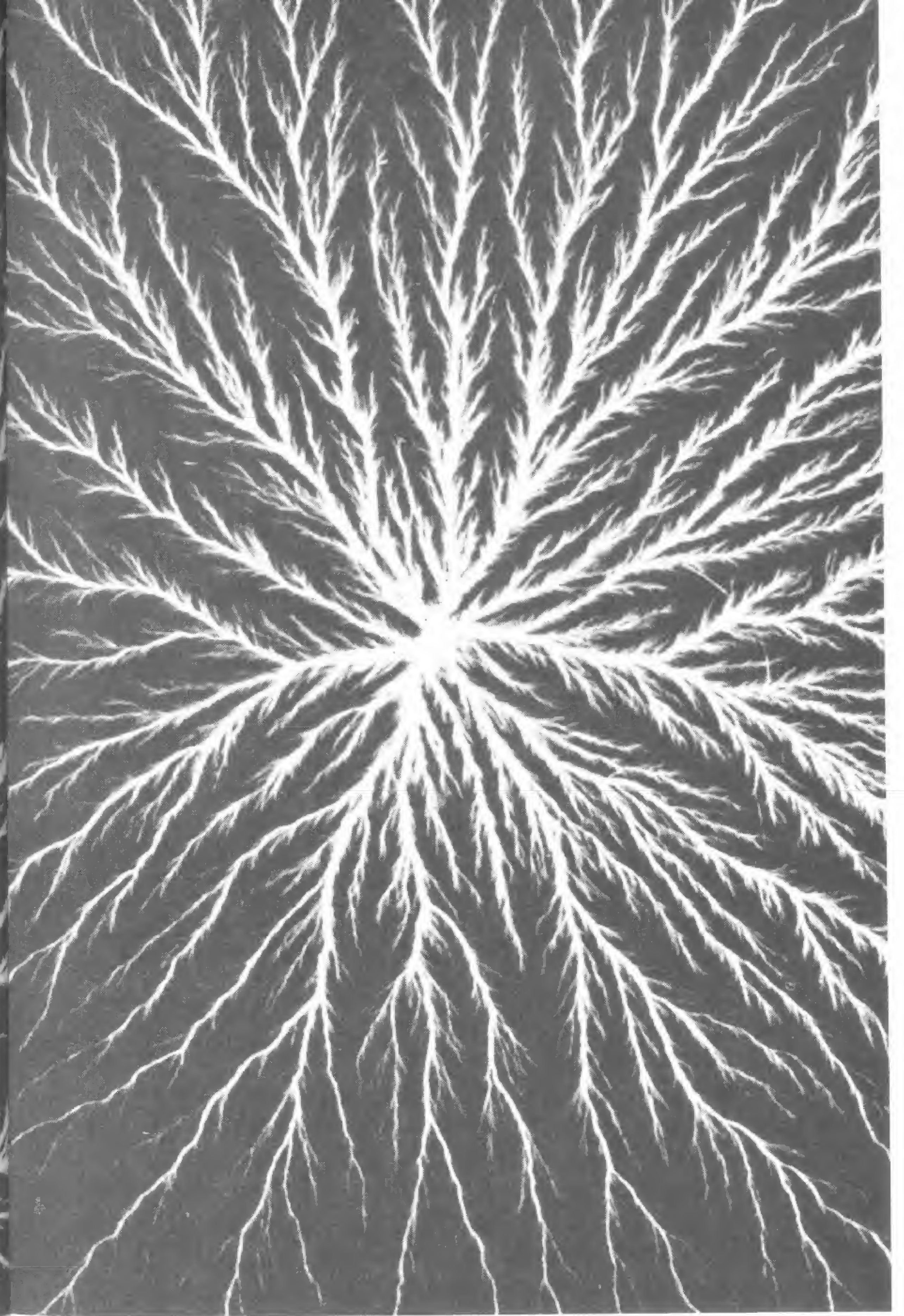


Fig. 91 b



A la vista de estos datos, empezamos a sospechar que los hallazgos estadísticos de Horton dependen más de las propiedades generales del espacio que del mecanismo de flujo en los ríos reales. Los diseños análogos que se observan en afluentes, pulmones, rayos y redes generadas al azar no surgen debido a analogías en los materiales o en las fuerzas que intervienen, ya que éstos son muy diferentes (medio acuoso, tejidos orgánicos y fenómenos eléctricos). Las semejanzas se derivan del factor común a todos los casos: el espacio.

Si cualquier red o sistema ha de ser distribuido uniformemente en el espacio, debe abrirse en forma de abanico hacia la periferia, ya que el propio espacio se expande de esta manera. En una red ramificada, dicha expansión se manifiesta en el desarrollo de un elevado número de trayectorias menores. La red crece por medio de la extensión de algunas de estas pequeñas trayectorias, las cuales, a su vez, dan lugar a otras, estableciéndose así una jerarquía de ramificaciones en la que las más pequeñas sobrepasan en número a las mayores.

### Topología de la ramificación aleatoria

Las relaciones topológicas en los modelos ramificados muestran también cómo el entorno espacial determina el tipo de modelo. Al final del capítulo 2 descubrimos que un gran número de modelos distintos pueden ser descritos mediante la fórmula:

$$1 J_1 \pm 0 J_2 - 1 J_3 - 2 J_4 - \dots = 2$$

donde  $J_1$ ,  $J_2$ , etc., son el número de uniones simples, dobles, etc. Podemos utilizar la misma fórmula para describir modelos de ramificación aleatoria. Esta descripción resulta facilitada por dos hechos: rara vez se dan uniones en las que participen más de tres líneas, y las uniones dobles no alteran el valor total de la fórmula. Por tanto, para modelos de ramificación aleatoria, sólo necesitamos considerar

el número de uniones simples y triples existentes. Según esto, nuestra fórmula se reduce a:

$$J_1 - J_3 = 2$$

El número de uniones simples  $J_1$  es sencillamente el número de fuentes más la salida final, igual por tanto a la cantidad de cursos de primer orden más uno. El número de uniones triples  $J_3$  es el conjunto de puntos en los que se encuentran tres líneas en el interior de la red.

Imaginemos ahora, a fin de estudiar las consecuencias de la fórmula, un curso alimentado por cinco fuentes: ¿qué posibles configuraciones puede presentar?

Sabemos que tendrá cinco cursos de primer orden y, puesto que  $J_1 = 5 + 1 = J_3 + 2$ , el número de uniones triples  $J_3$  es igual a 4. De forma similar, si tuviéramos un sistema de 100 fuentes, obtendríamos necesariamente 100 cursos de primer orden y 99 uniones triples.

Pero ¿cómo se distribuyen las uniones triples? ¿Cuántos cursos de segundo, tercer orden, etc., existen en un sistema dado? En un artículo ya clásico publicado en 1966, Ronald L. Shreve halló la respuesta.

De acuerdo al análisis de Shreve, podemos describir el caso más sencillo de un sistema con cinco fuentes. Como muestra la figura 92, dichas fuentes pueden distribuirse de 14 formas distintas. Cada una de ellas es diferente, en el sentido en que ningún giro o transposición de las mismas puede convertir una en otra. Cada configuración tiene cuatro uniones triples, como predice la fórmula. La intuición de Shreve consistió en suponer que todas las redes posibles tenían la misma probabilidad de ser adoptadas por un río alimentado por cinco fuentes en la realidad, discurriendo por un terreno uniforme. De las catorces posibilidades, las ocho que se encuentran en la parte superior de la figura tienen 5 cursos de primer orden y uno de segundo orden, mientras que las seis de abajo tienen 5 de primer orden, 2 de segundo y uno de tercero. Dado que, según Shreve, cada configuración es igualmente posible en un paisaje natural, si la suposición es cierta, deberíamos encontrar que en ocho de cada catorce casos, los sistemas de cinco fuentes tienen 5 cursos de primer orden y uno de



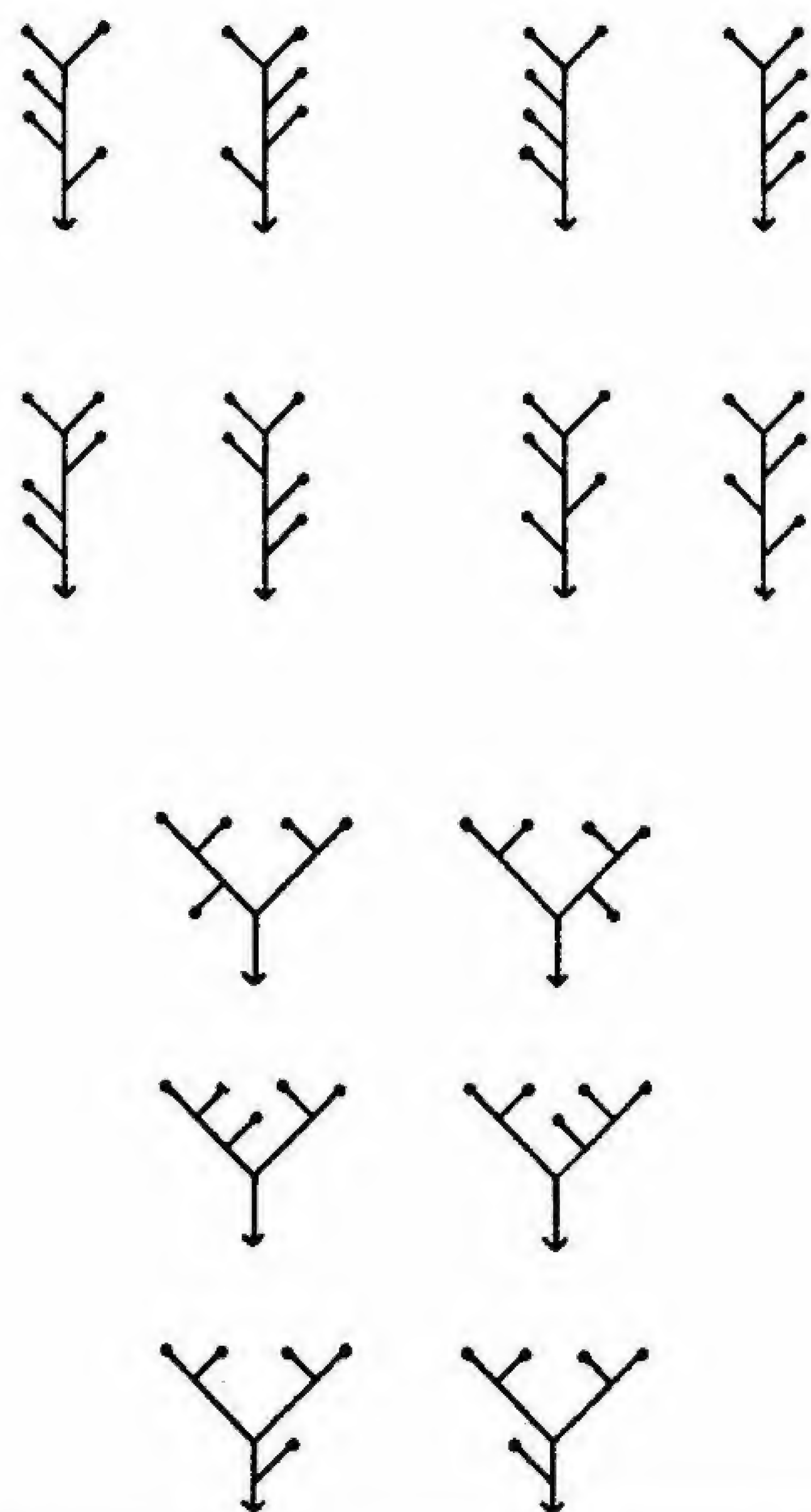


Fig. 92

segundo, y que en los seis casos restantes aparecen 5, 2 y 1 cursos de primer, segundo y tercer orden, respectivamente. Los sistemas fluviales que tienen su nacimiento en cinco puntos cumplen esta predicción.

El número de redes posibles se incrementa rápidamente cuando aumenta el número de fuentes. Así ¡hay nada menos que  $2,275 \times 10^{56}$  redes distintas para un sistema con 100 fuentes! Mas, cualquiera que sea la cantidad de fuentes, el número de redes distin-

tas es finito y cuando se consideran todas las posibilidades (lo que puede efectuarse mediante ordenador) la proporción de órdenes que resulta ser más probable se encuentra siempre en la Naturaleza. El descubrimiento empírico de Horton de que los cursos de un orden dado son de tres a cinco veces más numerosos que los del orden que le sigue inmediatamente describe de forma adecuada los índices de bifurcación de las redes fluviales en la gran mayoría de configuraciones posibles de éstas. Las numerosas fuerzas y agentes específicos que interactúan en el medio natural lo hacen de forma tan variada que las características de las redes fluviales en la Naturaleza se ajustan al promedio calculado.

### Trabajo mínimo y ángulos en la ramificación

Pese a las evidencias estadísticas de las correspondencias existentes entre los modelos ramificados y los ríos, la figura 86 no se parece realmente a un río, ni tampoco la figura 88. Las bifurcaciones son en estos dos diseños demasiado bruscas y regulares, y no existe esa suavidad de líneas y esa elegancia que caracteriza a los cursos naturales.

Para determinar el ángulo de cada bifurcación o intersección, debemos centrarnos en las fuerzas reales del flujo. En concreto, revisaremos los trabajos de Cecil D. Murray, que demostró cómo el efecto del mínimo esfuerzo describía de forma adecuada los ángulos de las ramificaciones en las arterias.

El principio del trabajo mínimo implica algunos razonamientos matemáticos, ya que el trabajo es un concepto físico definido de forma matemática. Supongamos que, en la figura 93, la sangre circula por una arteria principal desde A a D y que una parte de la misma llega también hasta el punto P a través de una rama lateral. Al circular directamente de B a P, la sangre se desplaza en el interior de una pequeña arteria, debido a lo cual experimenta una gran fricción a través de una considerable distancia. El trabajo de la sangre que atraviesa esta ruta es:

$$F_{BP} \times BP$$



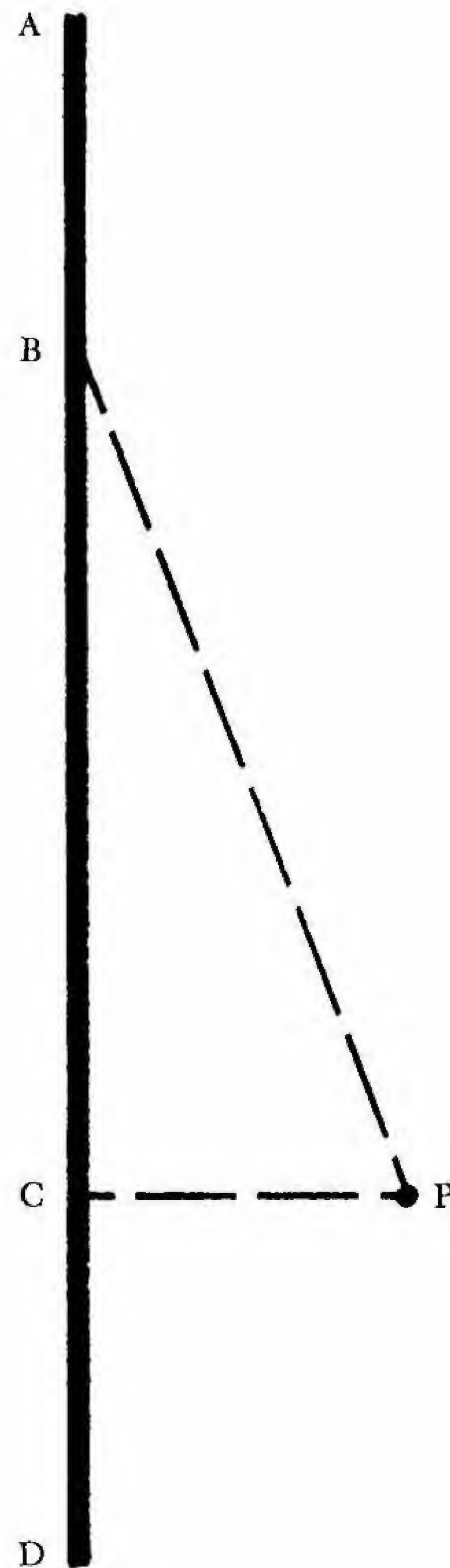


Fig. 93

Es decir, la fuerza  $F_{BP}$  requerida para conducir la sangre a lo largo de la estrecha rama lateral multiplicada por la longitud de dicha rama BP. Una alternativa que tiene la sangre para llegar hasta P consiste en ir de B a C atravesando la arteria principal, con lo que su pérdida debida a la fricción es menor, y desviarse después desde C a P. En esta nueva ruta, el trabajo total es:

$$(F_{BC} \times BC) + (F_{CP} \times CP)$$

O sea, la fuerza  $F_{BC}$  necesaria para conducir la sangre a lo largo de la arteria principal multiplicada por la longitud de la misma, BC, más la fuerza  $F_{CP}$  requerida para conducir la sangre a través de la rama arterial multiplicada por la longitud de esta rama, CP.

¿Cuál de estas dos rutas implica menor trabajo? Es difícil de determinar, ya que la respuesta depende de los tamaños relativos de la arteria principal y de las ramas secundarias. La primera ruta es más corta, pero la sangre recorre una distancia mayor a lo largo de la arteria más estrecha, donde el desplazamiento es más costoso. La segunda es más larga, pero en ella la sangre recorre una distancia menor por la arteria secundaria. Quizás un camino intermedio, cuya desviación con respecto al vaso principal se produzca en algún punto situado entre B y C, implique menos trabajo que cualquiera de los dos indicados. Alguna de las rutas intermedias posibles podría implicar el trabajo mínimo y minimizar así la suma de los productos de las fuerzas y las longitudes. Si así fuera, la sangre se desplazaría siguiendo este camino.

Reflexionando un poco acerca de la elección de caminos posibles, podríamos suponer, como observó Wilhelm Roux, que si una arteria principal es muy larga en comparación con una ramificación arterial secundaria, la sangre fluirá con menos esfuerzo si se desplaza en primer lugar por la arteria mayor y reduce su recorrido por la pequeña, es decir, si esta última se separa de la principal hacia el final formando con ella un ángulo de  $90^\circ$ . Por otra parte, si la arteria principal y la secundaria no difieren excesivamente en tamaño, la sangre, sin apenas tener que incrementar su esfuerzo, pasará a esta última y, como también observó Roux, en dicho caso las ramificaciones grandes del árbol arterial formarán con la arteria principal ángulos



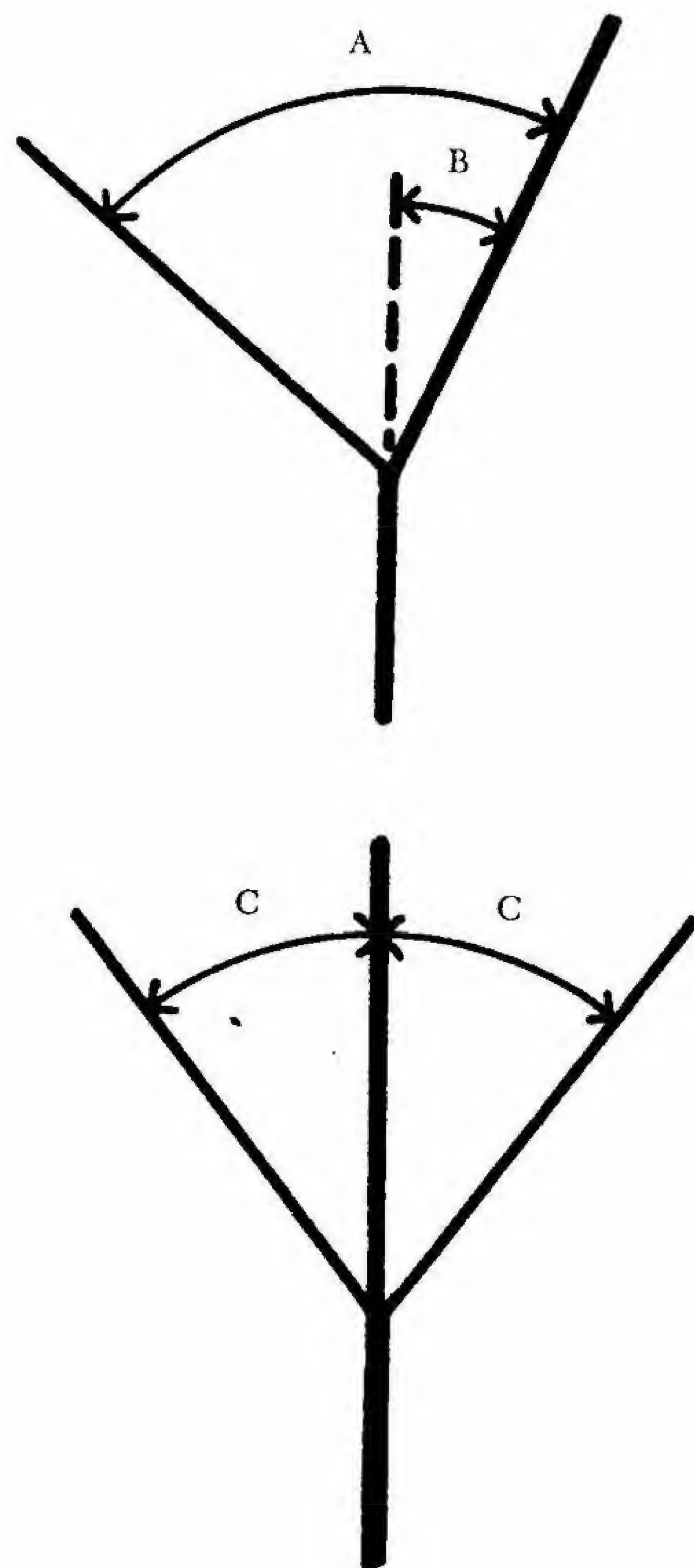


Fig. 94

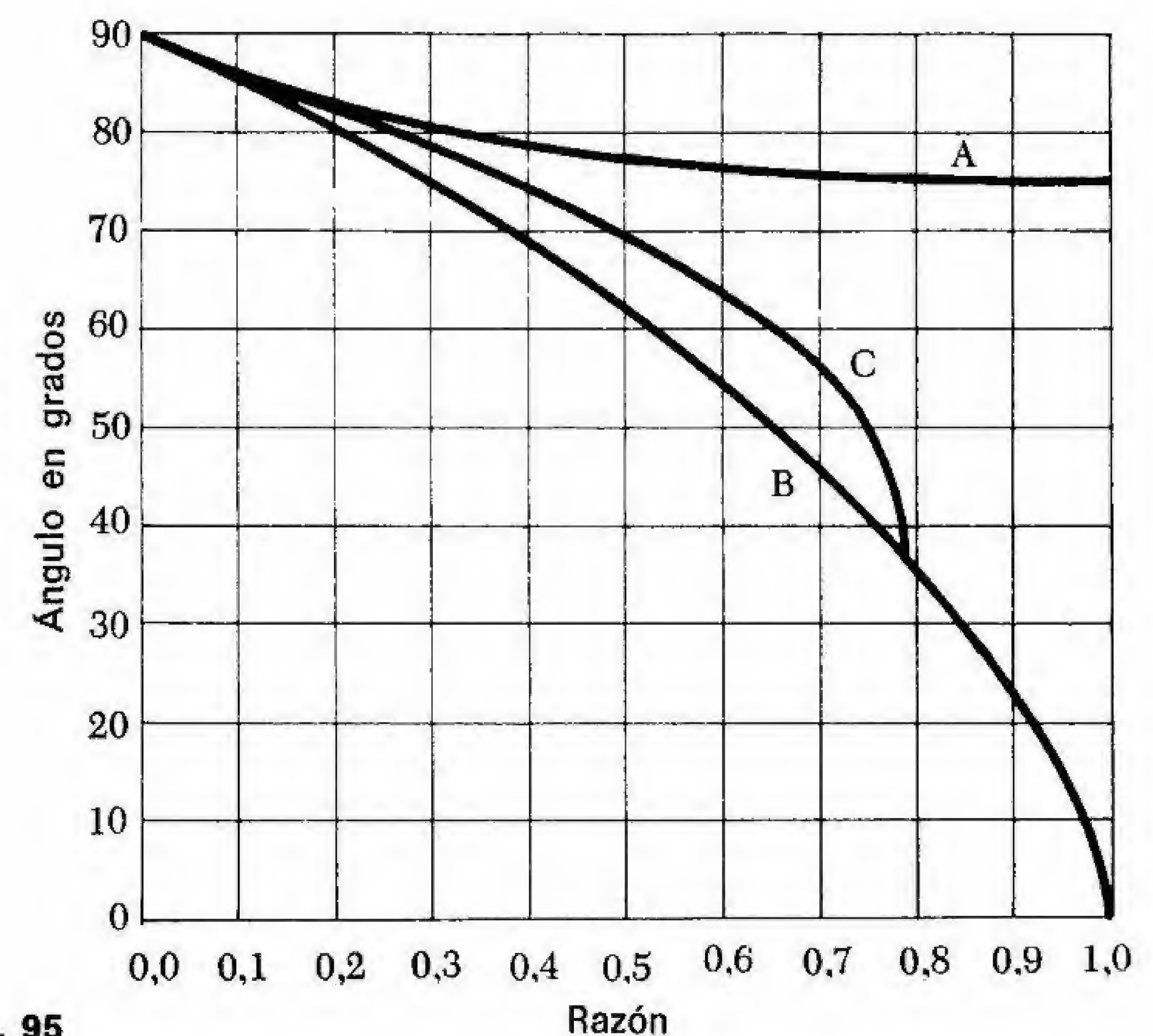


Fig. 95

considerablemente menores que un recto. Podemos por tanto formular una regla general: cuanto menor sea la ramificación, más próximo a  $90^\circ$  será el valor del ángulo de divergencia con el tronco principal.

Veamos cómo cuantificó Murray las observaciones de Roux. Basándose en el trabajo mínimo, Murray desarrolló un sistema, esquematizado en las figuras 94 y 95, que simplificó en su conjunto la cuestión de la determinación de los ángulos de ramificación.

Para utilizar el gráfico que aparece en la figura 95, base de este sistema, simplemente se registra la razón existente entre los diámetros de las dos ramas y se anota el ángulo que aparece en ordenadas. Se utiliza la curva superior del gráfico para el ángulo A, formada por la ramificación y la prolongación del tronco arterial; la curva inferior se emplea para el ángulo B, que indica la desviación del tronco, y la curva intermedia se usa para el ángulo C, formado por cualquiera



de las dos ramas iguales y la prolongación del tronco arterial. La figura 94 muestra todos estos ángulos.

Obsérvese que dos ramas iguales que divergen de una arteria principal o de un tronco común y que se oponen directamente entre sí no producen una desviación del tronco, en tanto que una sola rama desvía éste según un ángulo B, de acuerdo con la observación efectuada ya por Leonardo da Vinci:

«Las ramas de las plantas se encuentran en dos posiciones diferentes: opuestas entre sí o sin oposición. En el primer caso, el tallo central no aparece inclinado hacia ningún lado; en el segundo, el tallo central se desvía.»

Analizando algunas implicaciones más del gráfico de Murray, vemos que la curva que describe el ángulo A entre el tronco y la rama es relativamente plana, es decir, que el ángulo formado por dos ramas adyacentes muestra un grado de variación muy pequeño para ramas de diferente tamaño. Si un tronco se bifurca en dos ramas iguales y la razón entre los diámetros de éstas es igual a uno, divergen aproximadamente un ángulo de 75°. Si la bifurcación produce ramas pequeñas, y la razón entre el diámetro de la rama y el de prolongación del tronco es prácticamente igual a 0, la divergencia se aproxima a los 90°. Los ángulos de ramificación varían entre un estrecho margen comprendido entre 75° y 90°. Sin embargo, el ángulo B, que indica la desviación del tronco, varía de 0° para ramas pequeñas a 90° en el caso de las grandes. Estas relaciones son precisamente las que Roux había observado: la rama menor diverge del tronco en un ángulo muy próximo a los 90° y altera la trayectoria del tronco en una medida muy pequeña. La rama grande diverge menos del tronco, pero altera en mayor grado la trayectoria de éste.

Otra observación realizada por Leonardo da Vinci no se ha visto confirmada por los trabajos de Murray. Leonardo afirmó:

«Todas las ramas de un árbol en cada uno de los diferentes tramos de su altura, unidas, son iguales al grosor del tronco.»

Por tanto, matemáticamente podríamos suponer que el área de la sección transversal del tronco fuera igual a la de las ramas, de for-

ma que cuando un tronco con un diámetro  $d_0$  se dividiera en dos ramas cuyos diámetros fueron  $d_1$  y  $d_2$ , se cumpliera:

$$d_0^2 = d_1^2 + d_2^2$$

En sus fórmulas, sin embargo, Murray partió de un supuesto totalmente distinto y consideró que eran los volúmenes y no las áreas de las secreciones transversales los que se igualaban:

$$d_0^3 = d_1^3 + d_2^3$$

Murray asumió que el área de la sección transversal de las ramas era mayor que la del tronco, y que las primeras presentaban más espacio para el paso de la savia que el tronco que las alimentaba. D'Arcy Thompson elucidó las razones del supuesto de Murray y llamó la atención sobre la resistencia al flujo, más que sobre la capacidad de éste. Dado que las ramas ofrecen más resistencia al flujo que el tronco, su sección transversal debía incrementarse para transportar la misma cantidad de savia.

¿Cuánto debe exceder el área de las ramas al área del tronco? Murray supuso que, para mantener la igualdad del transporte, los diámetros del tronco y las ramas debían elevarse al cubo. En un momento posterior, al determinar el peso de las ramas y sus ángulos de ramificación, halló que el exponente era de aproximadamente 2,5. Dicho exponente, menor del previsto, se relaciona con el hecho de que el valor del ángulo formado por dos ramas iguales en un árbol se encuentra más próximo a los 60° que a los 75° hallado en las arterias. Podríamos suponer que las estrechas bifurcaciones de los árboles permiten a las ramas soportar la acción de la fuerza de gravedad. Pese a todo, incluso en los árboles, el exponente es superior a dos, por lo que la observación de Leonardo debe ser modificada: todas las ramas juntas sobrepasan el grosor del tronco.

Al igual que los árboles se ramifican con ángulos ligeramente diferentes a los de las arterias, es muy probable que también lo hagan así los ríos y los rayos. Pero en todos estos sistemas, ya se trate de la circulación de líquido sanguíneo, de agua o de electrones, las observaciones de Roux mantienen su validez: las ramas pequeñas for-



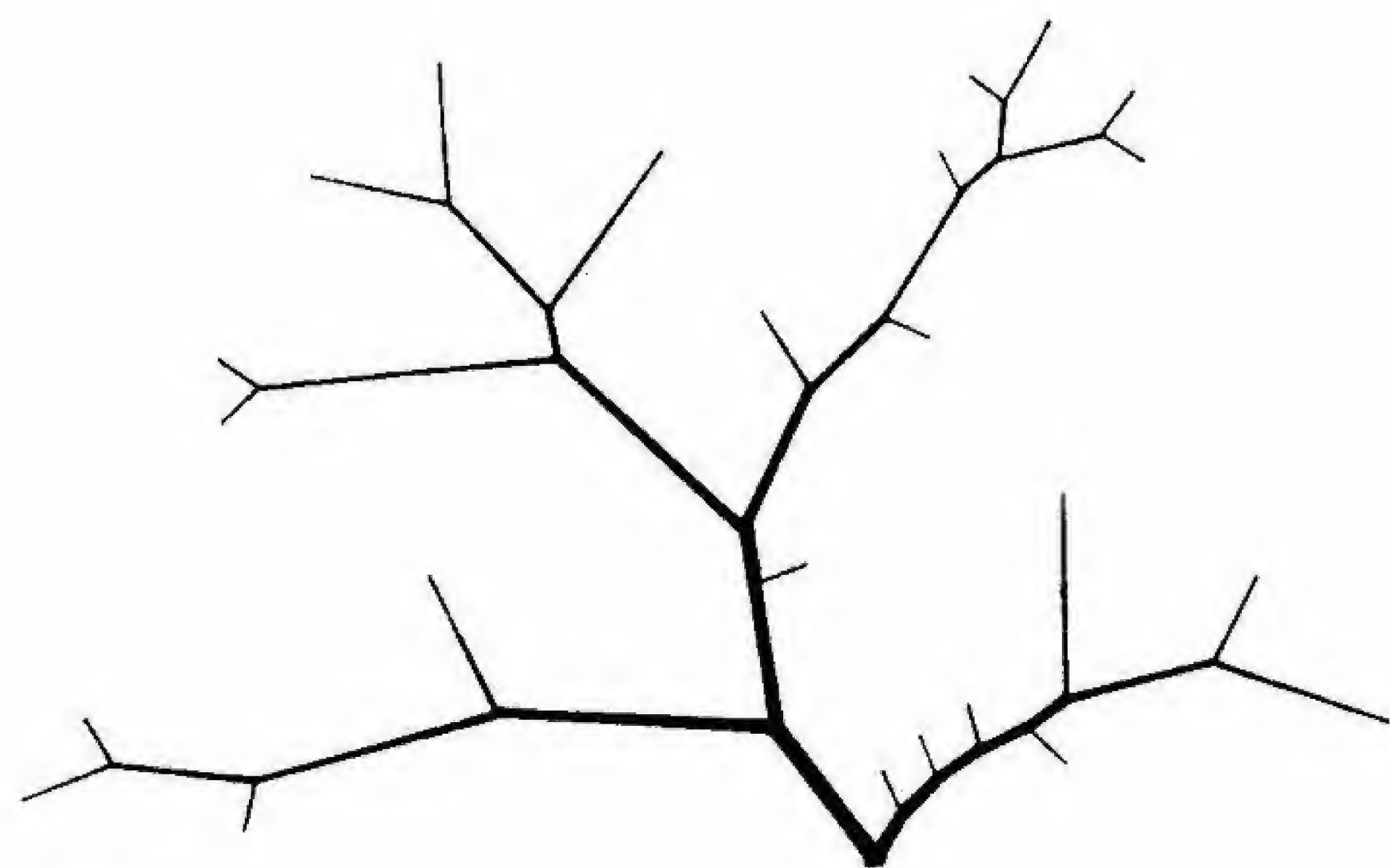


Fig. 96

man ángulos mayores con el tronco principal y alteran la trayectoria de éste en menor medida que las ramas de mayor tamaño.

Veamos qué sucede si utilizamos el gráfico de Murray para establecer los ángulos de ramificación del diseño de la figura 86. Podemos suponer que las líneas representan en este caso canales de caudal y que cuanto más elevado es el número de celdillas hexagonales que conecta un determinado canal, es decir, cuanto mayor es el área que drena, mayor será su anchura. Con el fin de compensar las pérdidas por fricción, proporcionalmente superiores, que se producen en los canales pequeños, admitiremos el supuesto de Murray y utilizaremos la potencia cúbica. Haremos que el cubo del diámetro de cada rama sea proporcional al número de celdillas hexagonales que atraviesa, con lo que podemos determinar los diámetros, registrar sus razones en el gráfico de la figura 95 y obtener un modelo como el de la figura 96.

Este árbol es topológicamente idéntico al de la figura 86 del cual deriva. Los dos tienen 24 ramas de primer orden y 23 uniones triples ordenadas en la misma secuencia jerárquica. Observe el lector, sin embargo, que la modificación del diseño sobre la base del esfuerzo mínimo (o, lo que es lo mismo, sobre la base de las fuerzas implica-

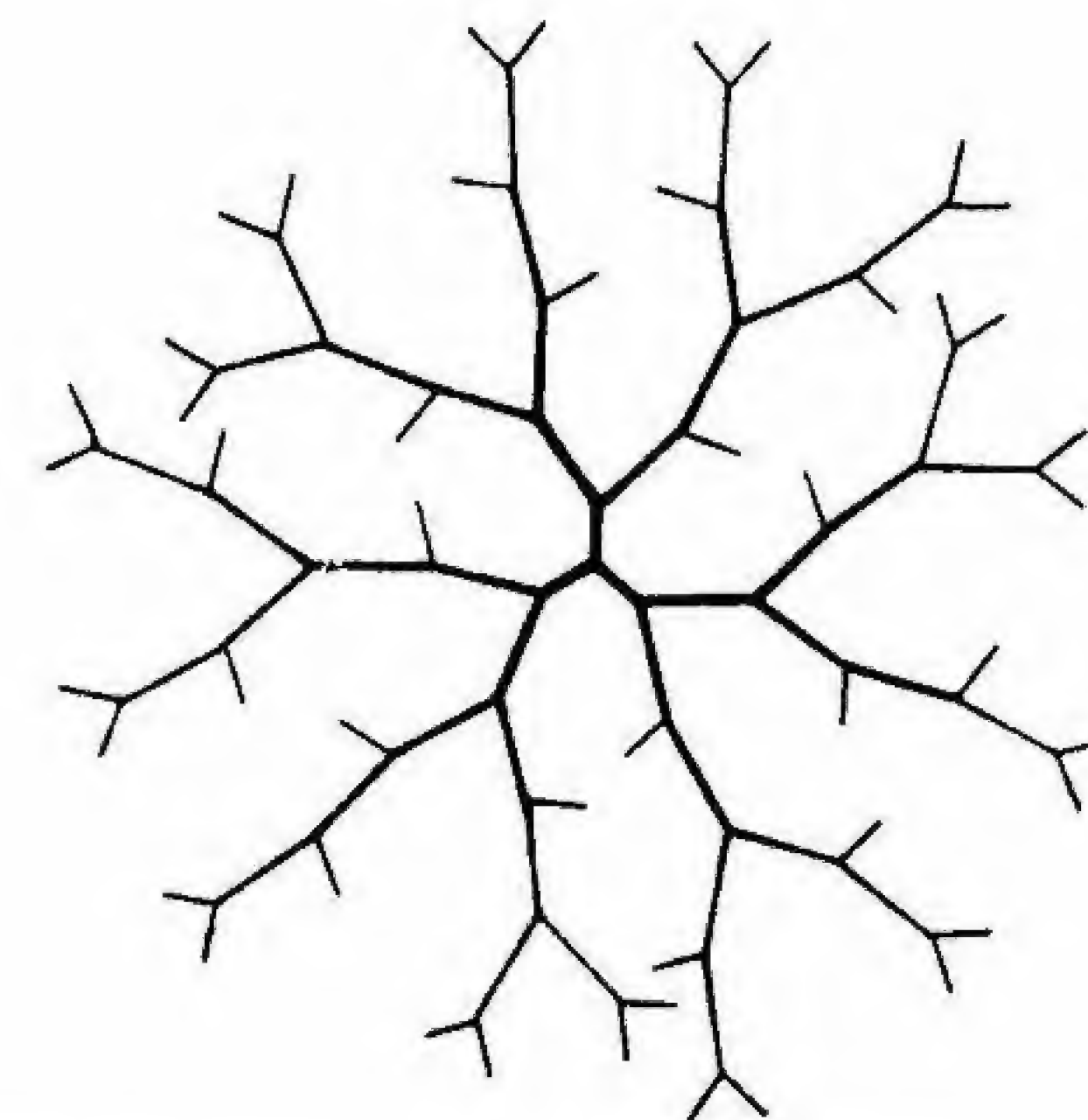


Fig. 97

das en el flujo) forma un modelo muy semejante a las ramas de un árbol real.

Resulta especialmente interesante destacar el hecho de que la figura 96 se ha creado sin relación alguna con el aspecto o configuración de ningún árbol auténtico. Las longitudes de las ramas y sus características topológicas han sido generadas a partir de números aleatorios, mientras que los ángulos y el grosor de cada ramificación se derivan de un modelo teórico basado en el trabajo mínimo. Los ángulos formados por las ramas pueden ser algo grandes (ya que se supuso un exponente de 3 y no de 2,5) y las ramas parecer demasiado rígidas y rectas, pero resulta sorprendente que partiendo sólo de modelos matemáticos hayamos obtenido una forma cuyo aspecto es, sin duda, muy «orgánico».

La figura 97 muestra otro modelo desarrollado con la ayuda del gráfico de Murray y que supone una transformación de la figura 26, un diseño ramificado que une un conjunto de puntos en una serie hexagonal con la menor longitud de líneas. La transformación semeja la vista aérea de un árbol en invierno. La red mínima de ángulos de  $120^\circ$  se transforma en una red con ángulos que varían de  $75^\circ$  a  $90^\circ$ , determinados por las longitudes relativas de sus ramas. La red



generalizada de longitud mínima se convierte, en virtud de consideraciones de fuerzas específicas en cada unión, en una red de trabajo mínimo en la que la resistencia de fricción interviene en una medida equiparable a la longitud.

Debemos señalar las estrechas relaciones que existen entre esta figura y la 96. Por ejemplo, si cualquier rama duplica su longitud, su diámetro se transforma según la raíz cúbica de 2, con lo que se hace  $\sqrt[3]{2} = 1,26$  veces mayor. Este incremento del diámetro afecta a la razón de los diámetros de la bifurcación más próxima y, en menor medida, a las de todas las bifurcaciones a partir de ésta, cuyos ángulos experimentan pequeños ajustes compensatorios de acuerdo con el gráfico de Murray. Mediante este proceso, de manera similar a lo que ocurre con los árboles reales, el árbol artificial responde a cambios sutiles en sus distintos componentes o, en palabras de Viollet-Le-Duc, «cada detalle guarda una relación definida con la composición general».

Al llegar a este punto, es preciso efectuar un breve paréntesis para añadir algo con respecto a la diferencia existente entre el modelo y la realidad que éste representa. El principio del mínimo trabajo puede inducirnos fácilmente a error al suponer que la Naturaleza construye árboles o vasos sanguíneos según un principio teleológico, una especie de plan global de naturaleza providencial. En nuestro ejemplo de las arterias, hemos dejado traslucir, en gran parte a causa de las limitaciones inherentes al lenguaje, que la Naturaleza adopta algo parecido a una decisión para mover la sangre desde un punto a otro, y que elige entre varias rutas posibles a fin de cumplir esta tarea. En realidad, sin embargo, la sangre *no necesita* llegar a ningún punto y el hecho de que tal llegada se produzca se debe a que los ángulos que se forman entre la arteria y la ramificación secundaria lo permiten, estando dichos ángulos asimismo determinados por el juego de fuerzas que actúan en el punto de divergencia. La Naturaleza no efectúa cálculos, sólo permite la existencia de ciertas bifurcaciones que obedecen a unas leyes dadas y que, a su vez, permiten el desplazamiento de la sangre siguiendo determinados recorridos. Las causas por las que se originan las bifurcaciones pueden ser múltiples (obstrucciones, abrasión de las paredes, etc.), pero estas fuerzas actúan en puntos específicos y localizados, sin relación alguna con ningún

plan general. La Naturaleza no obra de forma premeditada, ni utiliza las matemáticas, ni produce deliberadamente modelos globales: deja que los modelos surjan por sí mismos, en virtud de un complejo de interacciones que se producen necesariamente de acuerdo con determinadas leyes. La Naturaleza se encuentra, pues, más allá de la culpa y de la responsabilidad.

### Árboles contruidos mediante módulos

Utilizando números aleatorios y cálculos basados en el mínimo esfuerzo hemos formado algunos modelos que se parecen a árboles reales. Éstos, sin embargo, no crecen de una manera aleatoria ni irregular, sino que generan sus componentes de forma regular y de acuerdo a unos patrones estrictos, y sólo cuando intervienen fuerzas contrapuestas o se producen alteraciones patológicas el crecimiento o el aspecto parece aleatorio. Los árboles crecen siguiendo determinados módulos o unidades que se repiten. En cualquier especie, cada brote es, en esencia, idéntico a los restantes, y cada plántula se parece en sus rasgos característicos a la planta madre: en la reproducción, cada órgano floral se relaciona con los de su especie de la misma forma. En el siguiente capítulo estudiaremos ejemplos concretos del crecimiento de árboles. En este apartado examinaremos algunos modelos generales de crecimiento por adición de unidades que se repiten.

Si comenzamos con una unidad determinada, por ejemplo la Y grande que aparece en la figura 98a, en la cual el ángulo de la bifurcación es de  $75^\circ$ , y añadimos unidades similares pero progresivamente más pequeñas en el extremo de cada rama, repitiendo esta operación tres veces, emplearemos los cuatro tipos de unidades que se muestran en a para componer el árbol que podemos ver en b (el pie de las Y se ha punteado para indicar que existe un solapamiento entre las unidades cuando éstas se unen). Un análisis de Horton de este árbol revela un índice de bifurcación de 2: las ramas de primer orden son dos veces más numerosas que las de segundo orden. El índice de bifurcación sigue, por supuesto, el patrón mediante el cual es generado el árbol y cada tipo de unidad representa el doble de la que le precede.



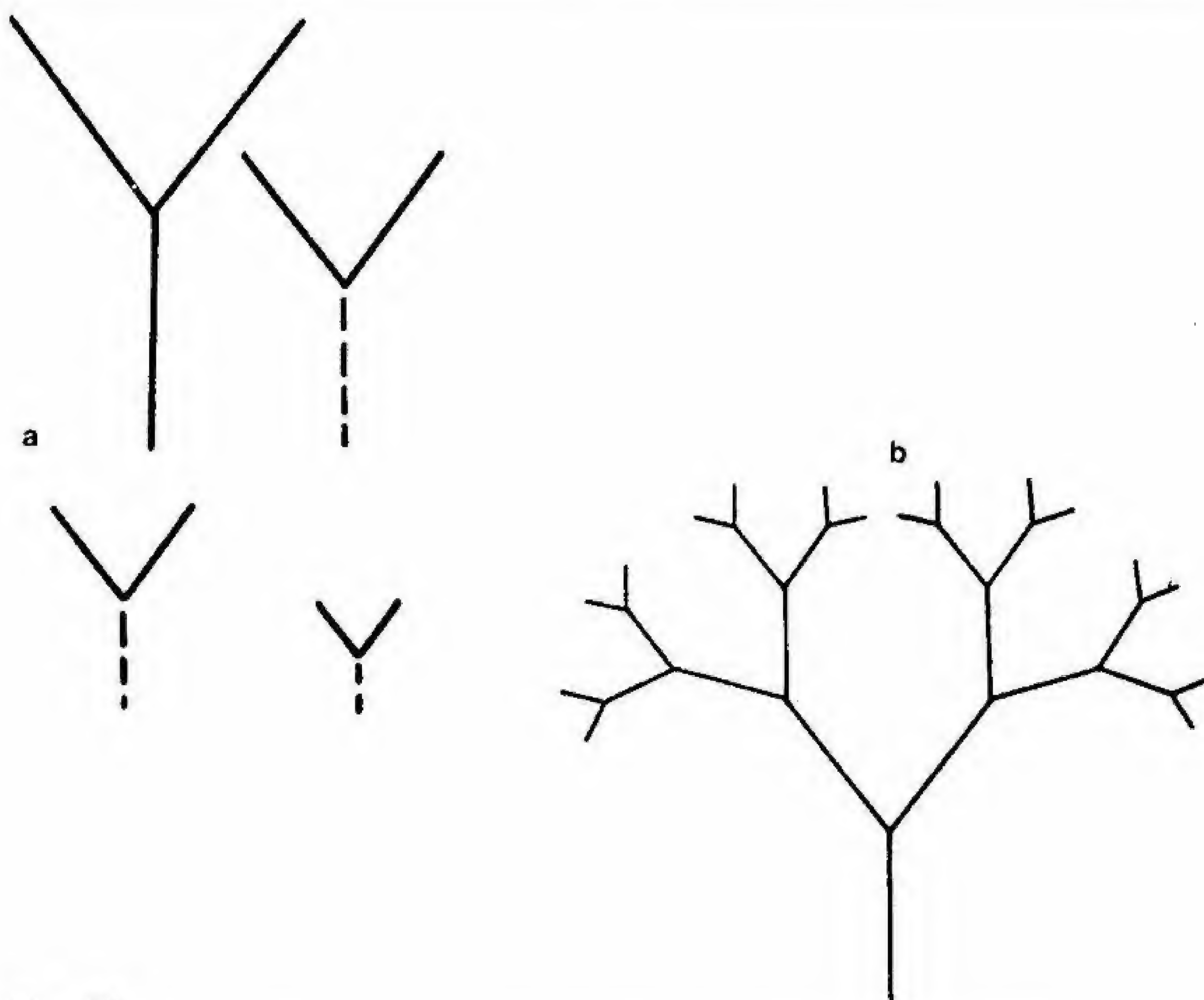


Fig. 98

De forma similar, utilizando las unidades asimétricas que aparecen en la figura 99a, podemos generar el árbol que obteníamos en la figura 99b con un índice de bifurcación igual a 3. La regularidad de este árbol no es aparente a primera vista, pero un estudio un poco atento del mismo muestra que los elementos análogos de ramas también análogas se bifurcan de forma idéntica.

Mediante el mismo procedimiento podemos generar a partir de las unidades que se muestran en la figura 100a el árbol que aparece en 100b, cuyo índice de bifurcación es 4. Pese a su aparente irregularidad, se observa una rigurosa repetición de elementos.

En lugar de añadir unidades cada vez menores, vamos ahora a construir una nueva figura con elementos del mismo tamaño pero que poseen dos ramas de distinta longitud, como se muestra en la figura 101a (el brazo mayor de la Y es de longitud doble que el me-

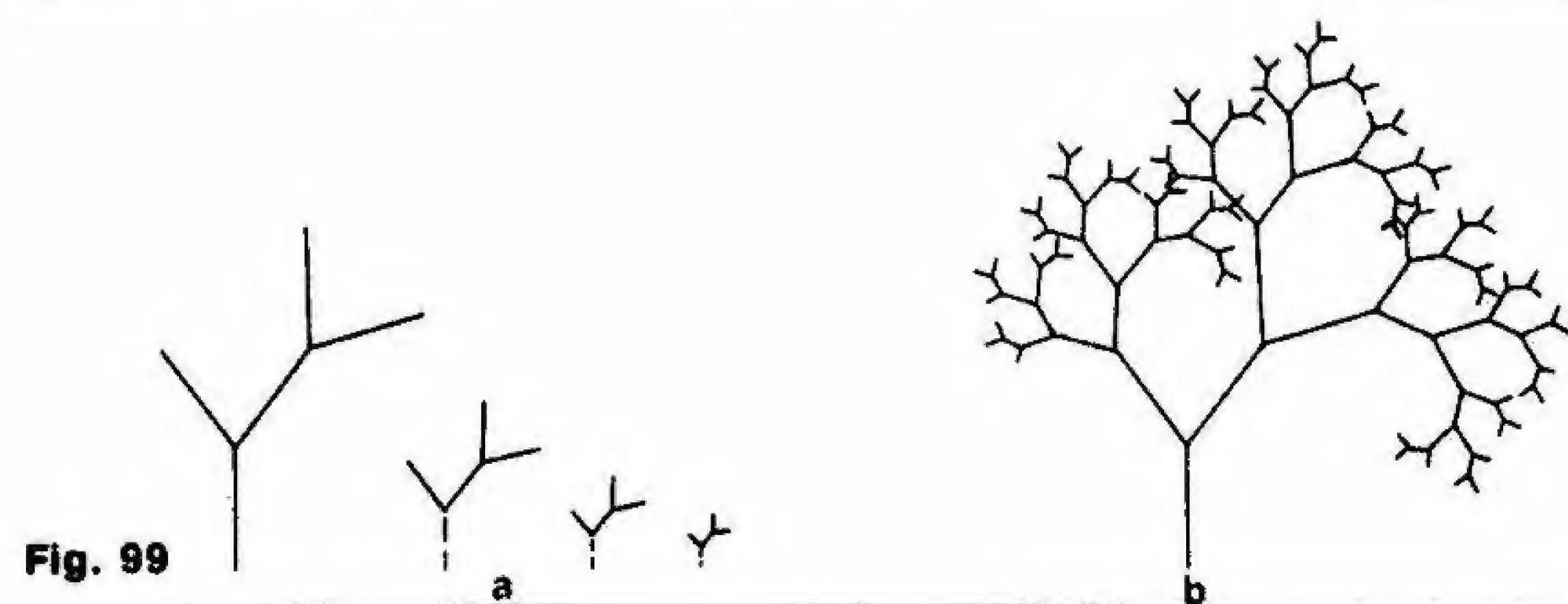


Fig. 99

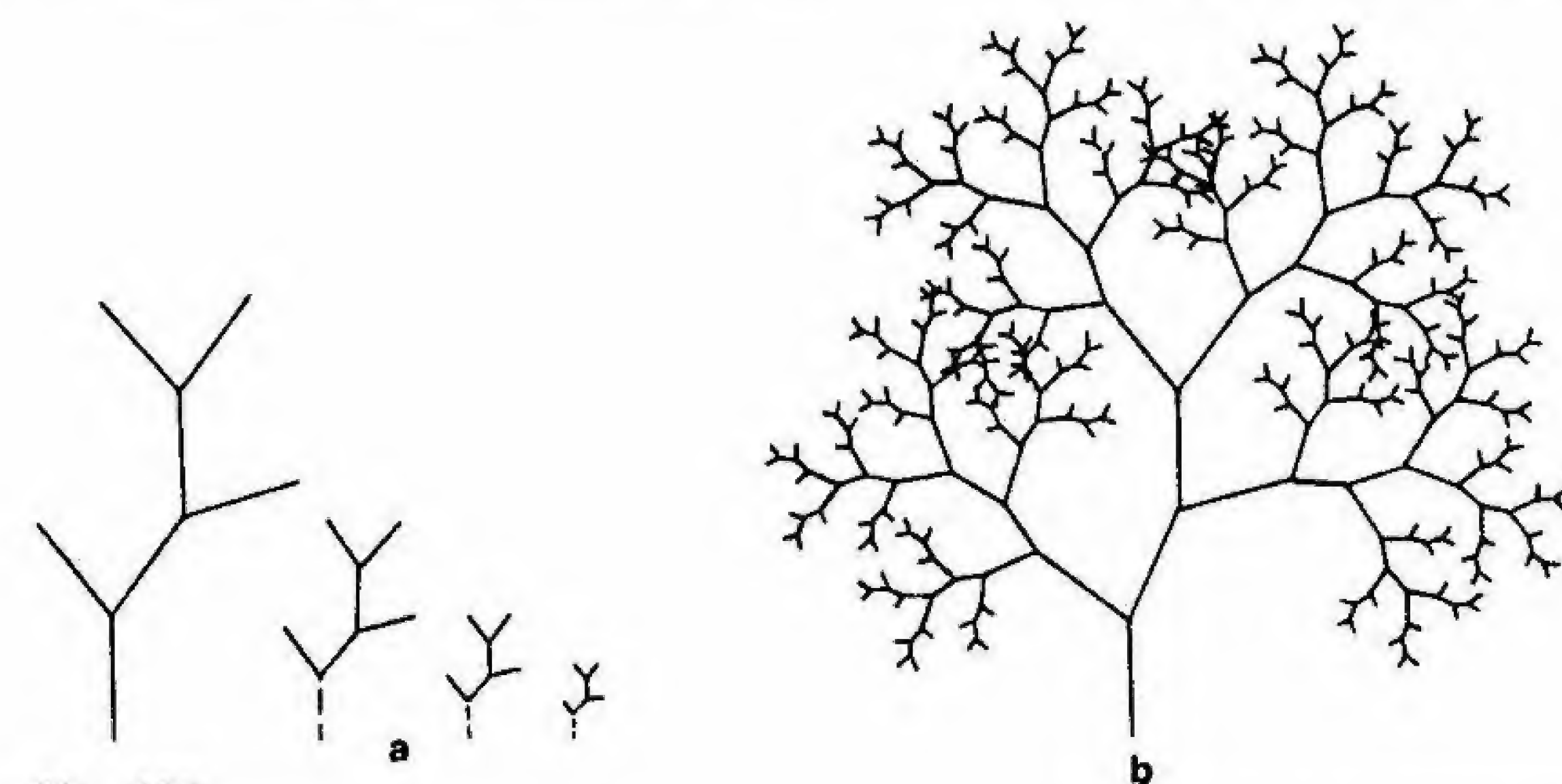


Fig. 100

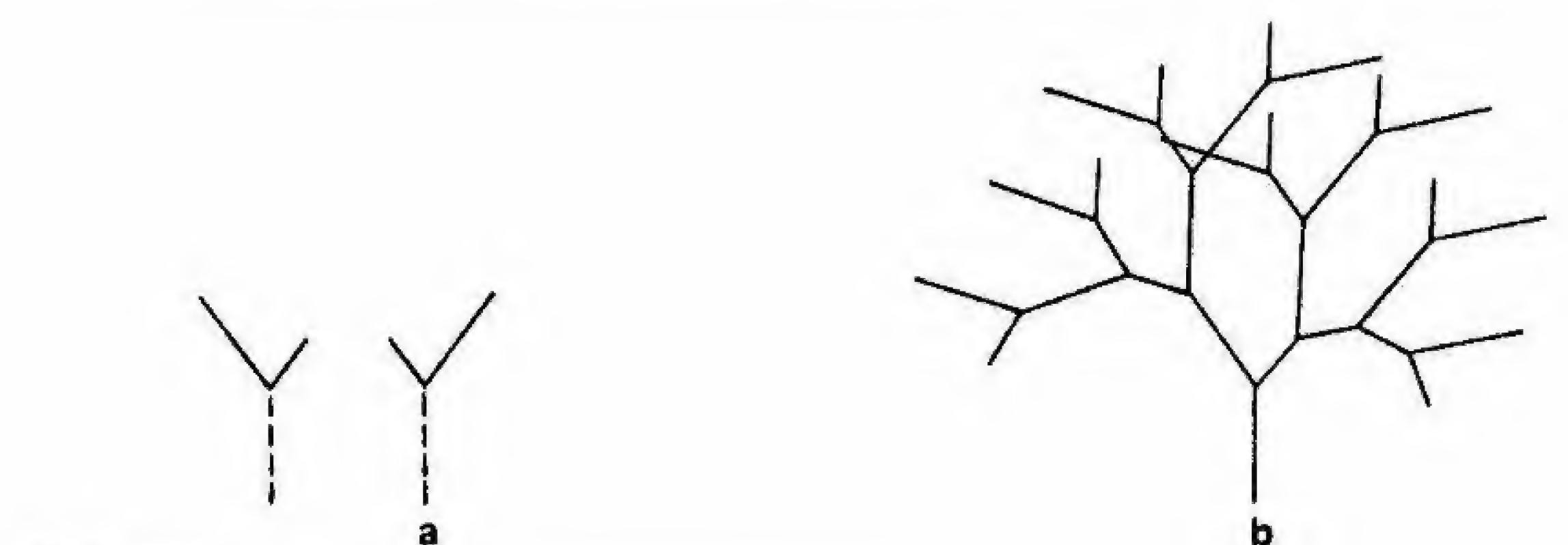


Fig. 101



nor). Comencemos por la unidad de la izquierda y añadamos a su brazo más corto una unidad idéntica a ella, en tanto que en su brazo más largo situamos una unidad similar a la de la derecha. Si continuamos añadiendo elementos de esta forma durante cuatro veces consecutivas, obtendremos la figura 101b.

Este árbol contiene sólo líneas de dos longitudes distintas, todas ellas dibujadas con el mismo grosor. Todas las bifurcaciones presentan idénticos ángulos y tienen un brazo largo y otro corto. El largo crece hacia la derecha a partir de una rama larga y hacia la izquierda si arranca de una corta. Desde la base de la figura hasta el extremo de una rama cualquiera encontramos siempre que hay cuatro bifurcaciones. En definitiva, no se da crecimiento arbitrario. Aunque la figura se forma a partir de reglas muy simples, observe el lector cómo la forma de la misma resulta agradable y airosa. El árbol crece a partir de la combinación regular de un módulo dado y su imagen especular, pero no es tan regular como para parecer monótono, ni tan irregular como para resultar completamente amorfo. Se halla dentro del estrecho margen situado entre el orden y la diversidad que consideramos como bello.

El árbol de la figura 101 tiene un índice de bifurcación exactamente de 2 y aún parece más armonioso y natural que el árbol asimétrico de la figura 98, que posee el mismo índice e igual número de bifurcaciones. ¿Podemos describir la diferencia existente entre los dos diseños de una forma cuantitativa? Algunas de las diferencias estriban indudablemente en las longitudes de las ramas, pero las restantes radican en su ordenación.

La figura 102a presenta el árbol de la figura 98 con líneas de crecimiento que conectan los centros de las ramas de igual longitud. El número de cada línea indica la cantidad de ramas que une. Puesto que cada rama se divide en otras dos, y éstas a su vez lo hacen en otras dos más, cada línea de crecimiento corta el doble de ramas que su predecesora. En otras palabras, el número de ramas crece en progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16... Los árboles de las figuras 99 y 100 se ramifican en la misma progresión geométrica.

En la figura 102b observamos una progresión diferente. En este caso, si cortamos las ramas más largas por dos puntos, suponiendo que experimentan un crecimiento dos veces mayor que las ramas

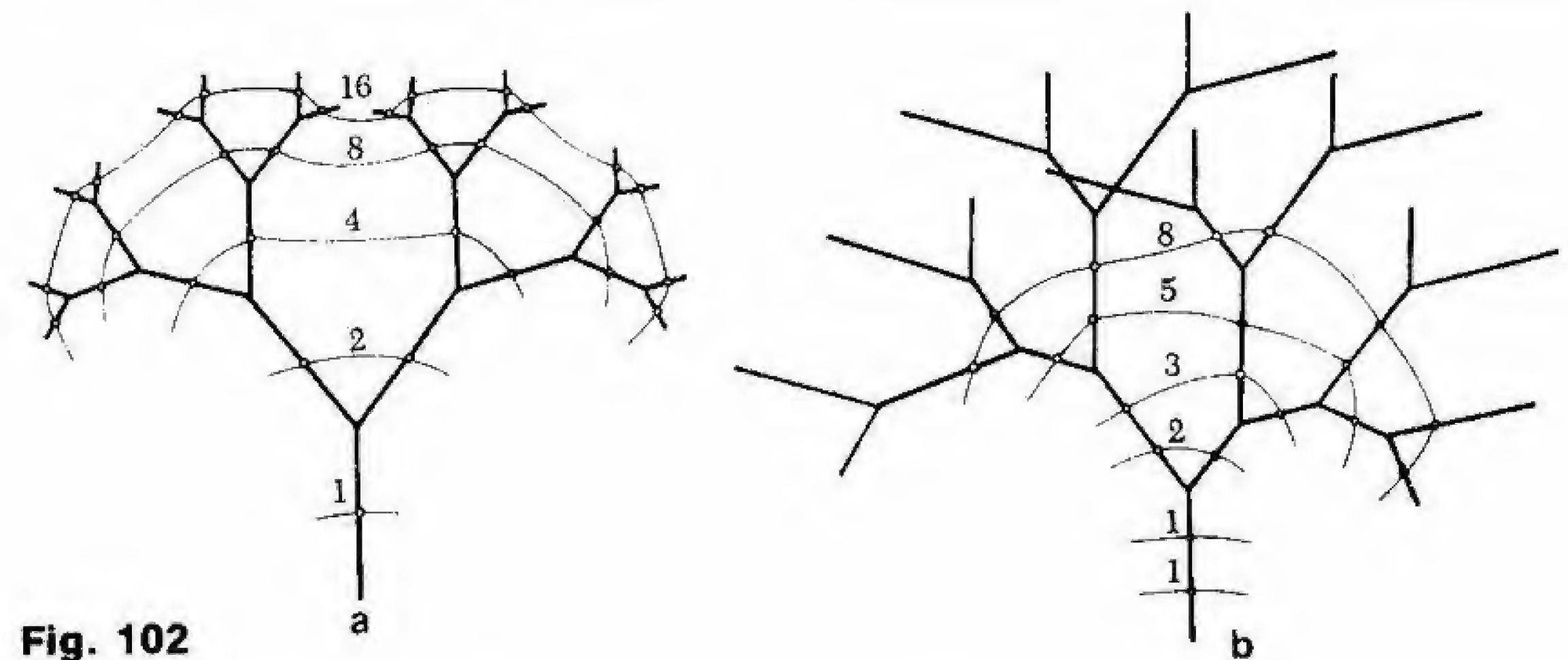


Fig. 102

cortas, las líneas de crecimiento idéntico unen las ramas según la progresión: 1, 1, 2, 3, 5, 8... Esta sucesión numérica, en la que cada término es la suma de los dos que lo preceden, constituye la famosa serie de Fibonacci y, a medida que la progresión continúa, la razón entre cualquiera de los términos y el que le sigue se aproxima a la razón de la denominada sección áurea, 1 a 1,61803... (la razón es notable o «áurea» porque las dos magnitudes mantienen entre sí una única relación, de forma que la menor es a la mayor como ésta es a la suma de ambas).

Las series de Fibonacci han servido en gran medida para describir modelos de ramificación y también aparecen en otros muchos contextos. Señalemos, sin embargo, que este tipo de sucesiones son únicamente una de las muchas secuencias numéricas que podrían utilizarse en la descripción de los patrones de ramificación. El árbol de la figura 100, cuyas ramas siguen una progresión geométrica regular, representa una descripción tan convincente de un árbol real como la figura 102b basada en la progresión de Fibonacci. Ambas progresiones describen simplemente «especies» distintas de árboles.

Aunque algunos de nuestros árboles contruidos a base de módulos se parecen superficialmente a los árboles reales, sus ramas se solapan y por tanto difieren de la morfología que presentan los ríos. En representaciones gráficas bidimensionales de árboles tridimensionales podemos aceptar este solapamiento, ya que nos es fácil suponer que una rama pasa por delante de otra. Sin embargo, en una



cuenca fluvial, la competencia entre los distintos cursos o ramificaciones se establece en el mismo plano, y cuando dos cursos se cruzan, uno de ellos elimina al otro capturando sus aguas.

Nuestros árboles artificiales presentan aún otra característica que indica la ausencia de fuerzas contrapuestas en su formación: carecen de falsos comienzos, de chupones (ramas que crecen desde la base del árbol con gran rapidez y anárquicamente con respecto a las demás), etc. Por el contrario, los modelos generados mediante números aleatorios crecen de forma competitiva. Como hemos visto, en estos últimos algunas ramas se extienden y se ramifican y otras no lo hacen, en función de que en sus proximidades se hallen otras ramas que dificulten su crecimiento.

Quizá podamos introducir a pesar de todo la noción de competencia y formar árboles artificiales según reglas muy sencillas. Para acabar, nos serviremos de los trabajos realizados por el matemático Stanislaw Ulam.

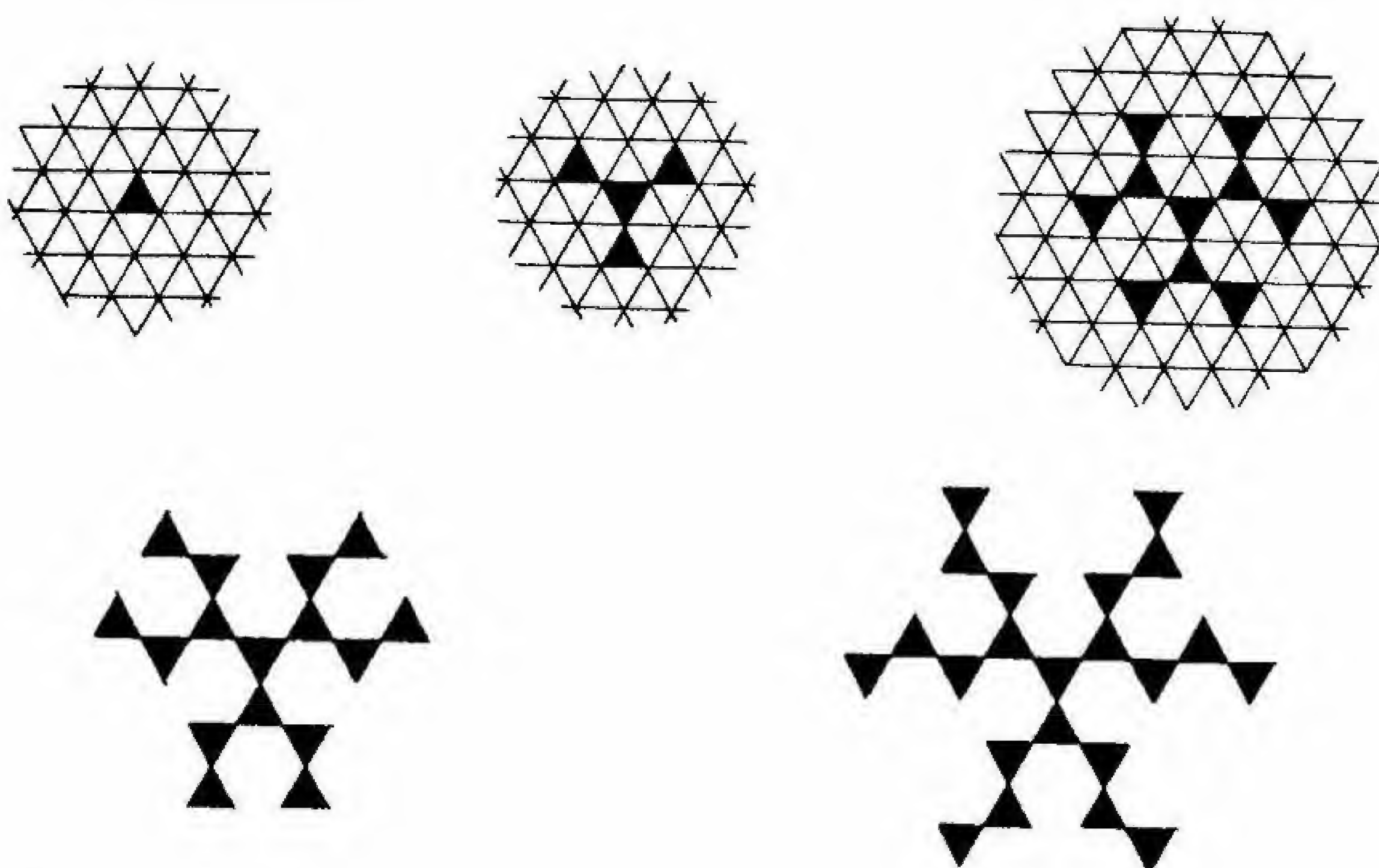


Fig. 103

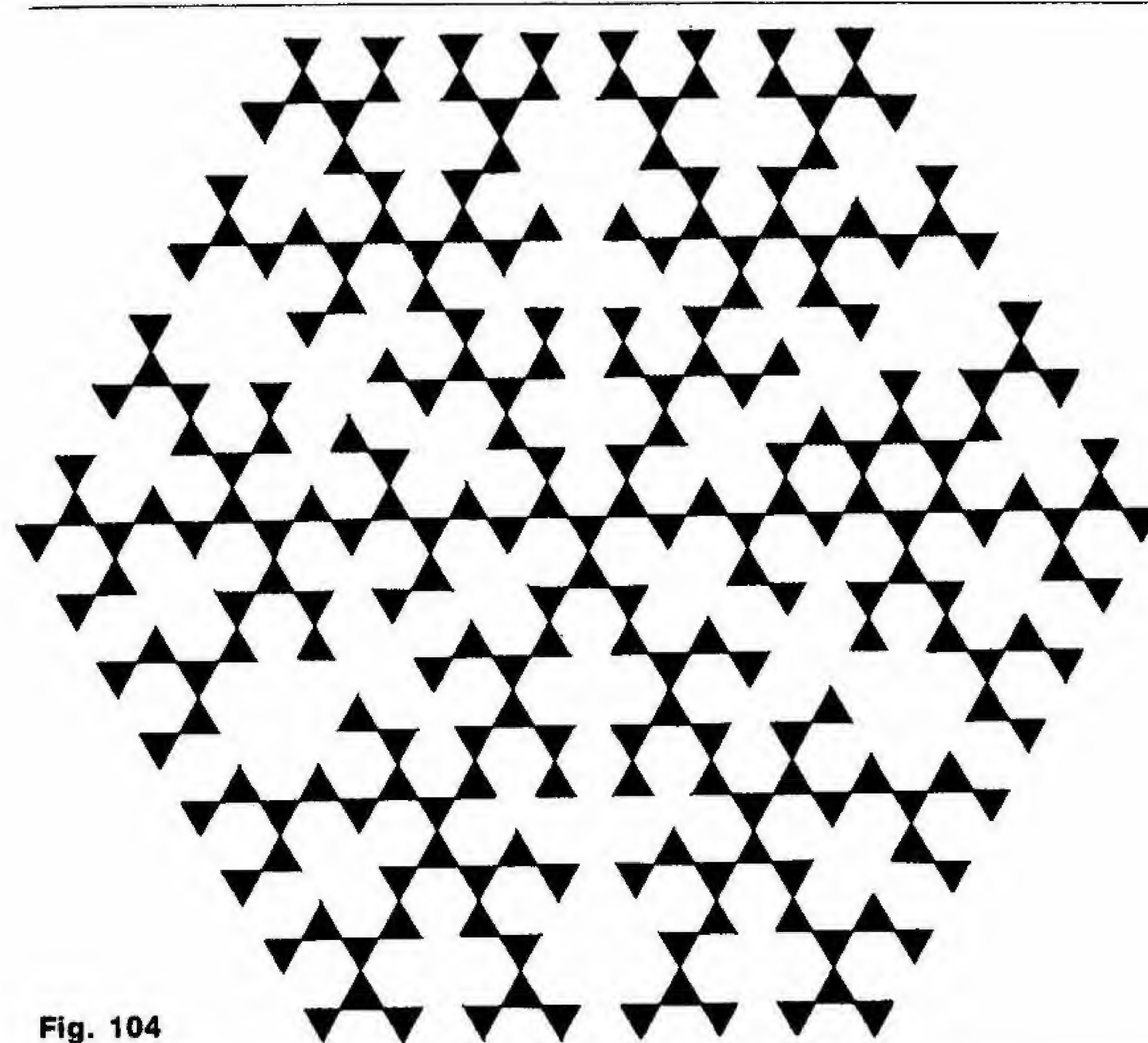


Fig. 104

### Árboles formados según determinadas reglas

Ulam ha generado modelos de crecimiento rellenando o coloreando una serie de celdillas de un mosaico regular según reglas fijas y estrictas. Similares a tales modelos son los que aparecen en las figuras 103 y 104, formados mediante la coloración de series sucesivas de triángulos siguiendo un determinado criterio. Éste consiste en comenzar con un triángulo cualquiera y colorear todos los que le siguen de manera que toquen uno y sólo uno de los vértices de la generación precedente, como se muestra en la figura 103, en la que pueden verse las cinco primeras generaciones construidas una tras otra de acuerdo con la regla (el mosaico triangular que sirve de guía se ha omitido a partir de la tercera generación).



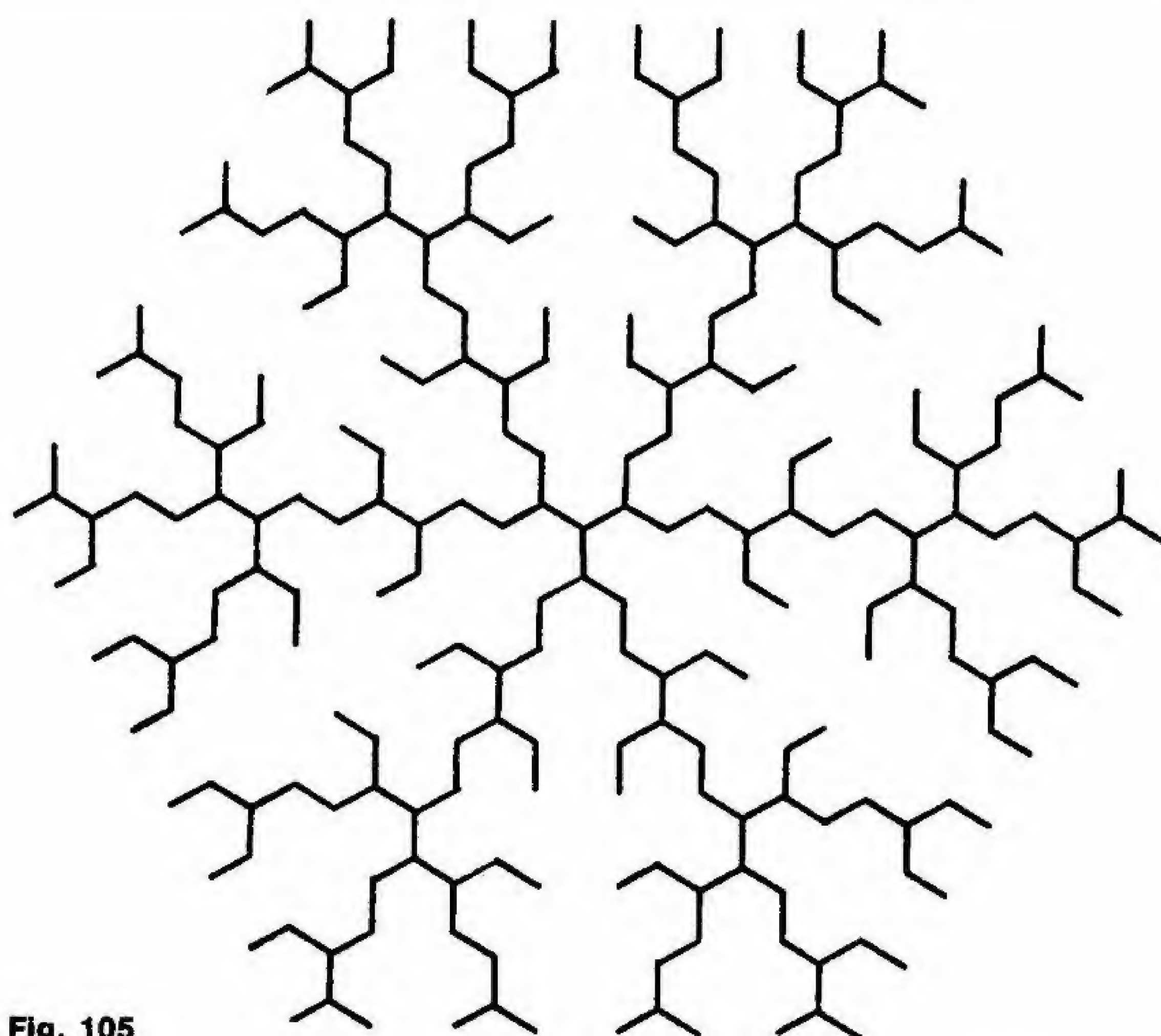


Fig. 105

La figura 104 representa el modelo obtenido tras quince generaciones consecutivas, y la figura 105 muestra el diseño formado uniendo linealmente los centros de las quince generaciones de triángulos del modelo anterior.

La figura 105 revela algunas regularidades interesantes. Al igual que sucede en la estructura de un copo de nieve, contiene seis brazos. No obstante, si observamos con mayor atención descubrimos que el modelo se basa en la repetición de un único brazo que alterna con su imagen especular. En la figura 106 aparecen dos brazos adyacentes y comprobamos cómo un espejo situado en la línea de puntos reflejaría exactamente un brazo a partir de otro en la forma en que lo hace la figura.

La figura 107 muestra uno de los brazos al cabo de 28 generacio-

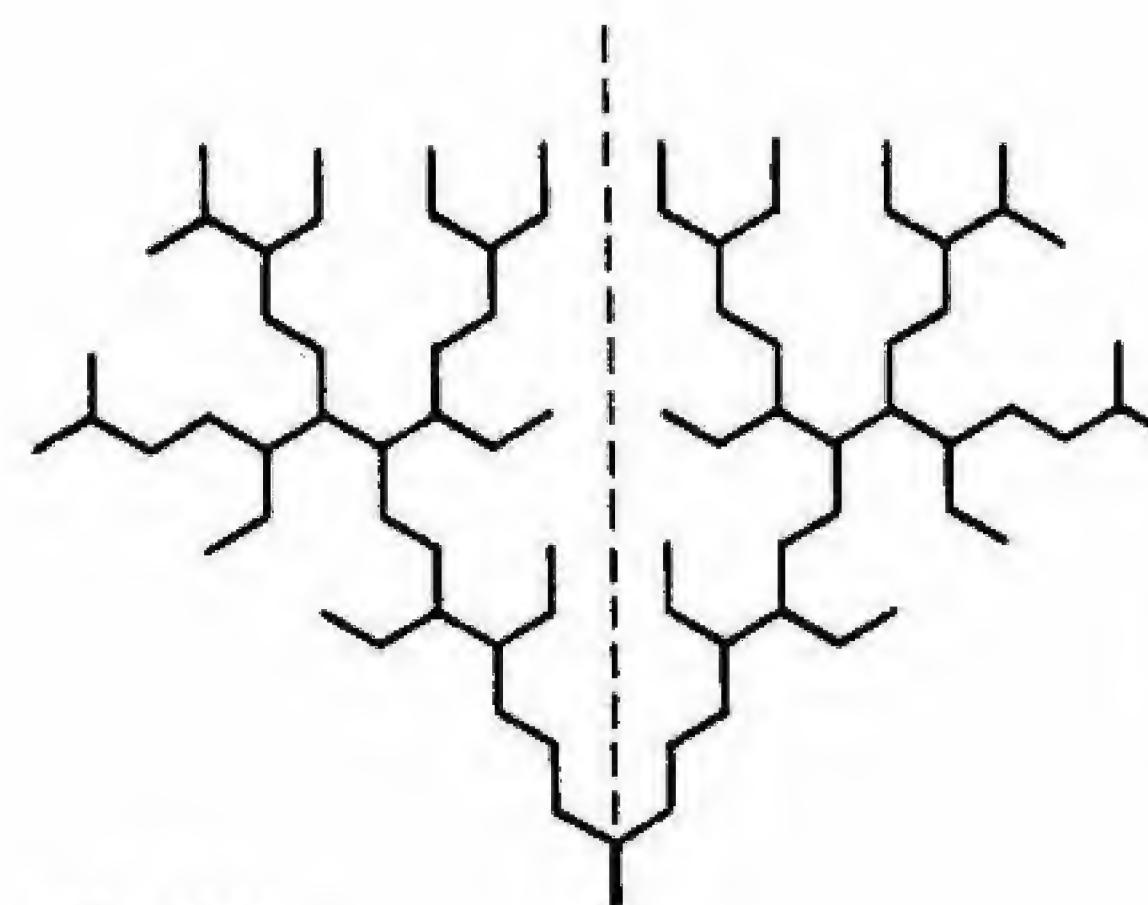


Fig. 106

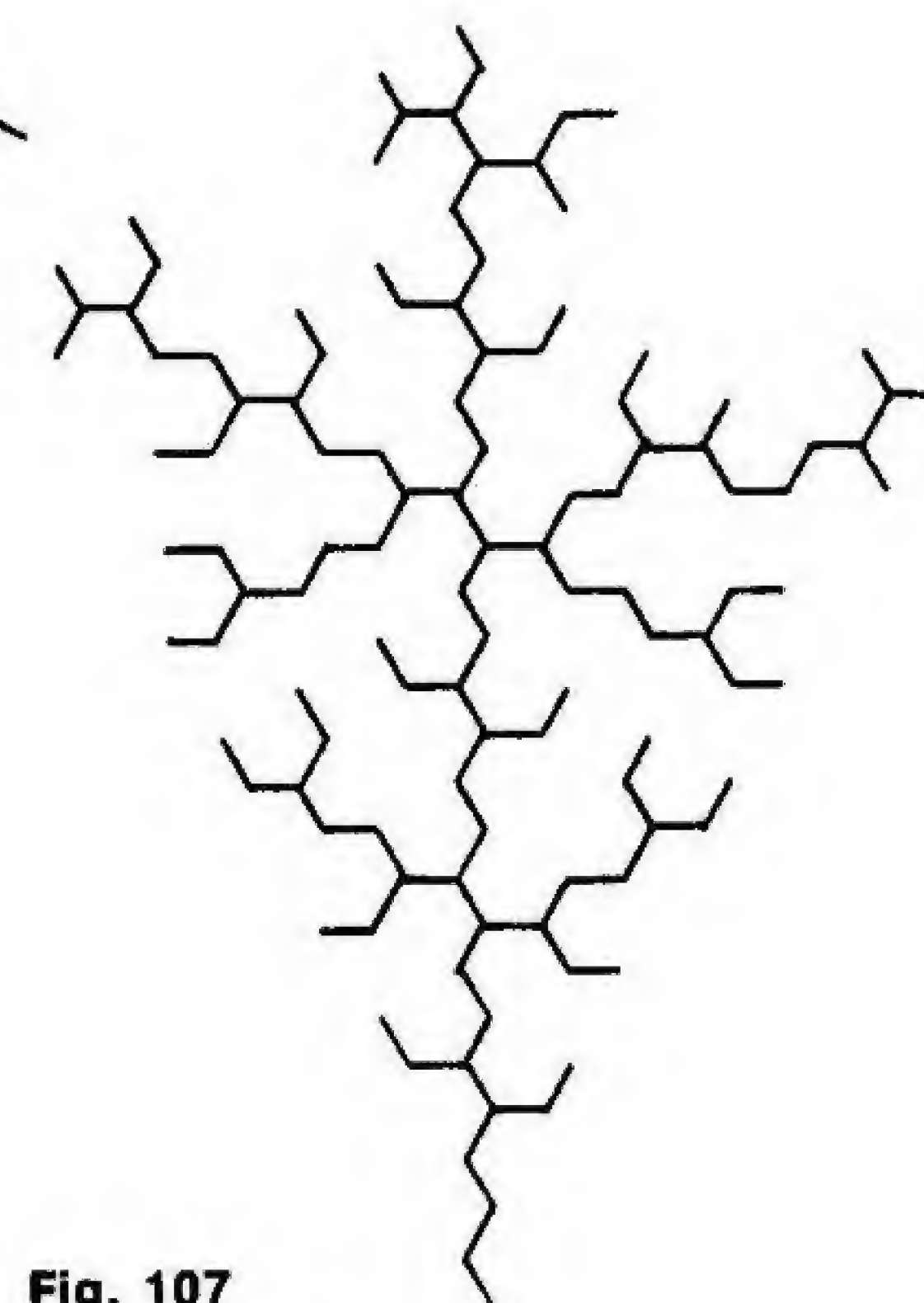
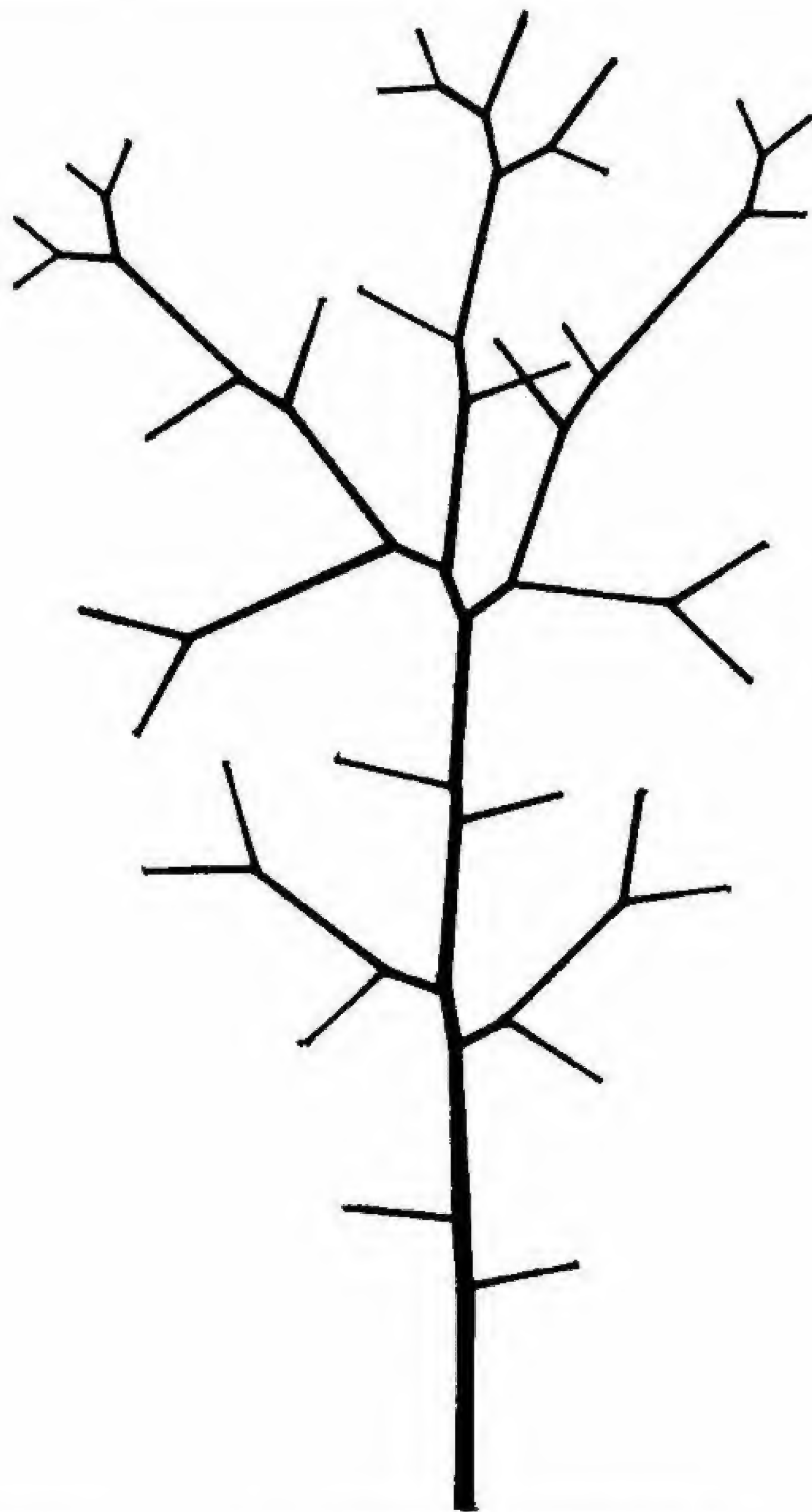


Fig. 107

nes. En ella aparece un eje central claramente definido, pero su método y la simplicidad de la regla que lo ha originado no resultan obvios en absoluto.

Como los ríos y los modelos generados por números aleatorios, el árbol de la figura 107 tiene índices de bifurcación comprendidos entre tres y cinco y sus ramas de orden más elevado son mayores que las otras. Observamos también los indicios reveladores de la acción de fuerzas contrapuestas que faltaban en los árboles contruidos a partir de módulos: ramas que no dan lugar a otras, ramas que se detienen en su crecimiento en los primeros estadios, etc. Por tanto, estadísticamente (y visualmente también) el árbol de la figura 107 construido según una regla fija y determinada es similar a aquellos que se generan a partir de números aleatorios, con lo que comproba-



**Fig. 108**

mos cómo modelos profundamente distintos pueden describir de manera satisfactoria fenómenos idénticos. El azar puede aparecer regular y la regularidad mostrar una apariencia aleatoria.

Cuando utilizamos la representación gráfica de Murray para determinar los ángulos de ramificación en el árbol de la figura 107, obtenemos el agradable diseño que aparece en la figura 108. El modelo se asemeja al de la figura anterior en que tiene el mismo número de

líneas que se juntan en idéntico número de uniones. La apariencia orgánica, viva, del árbol nace como el resultado de modificar sólo sus ángulos y la anchura de las ramas.

Observe de nuevo el lector cómo el árbol de la figura 108, con sus ramas solapándose, se parece más a un verdadero árbol que a un río, en contraste con el de la figura 107. Por supuesto, podríamos fijar las ramas de la figura 107 en los ángulos adecuados a fin de describir un río, y aun obtener un modelo cuyos cursos tributarios no presentaran solapamiento, pero el modelo de Murray para la determinación de ángulos es independiente del de Ulam, aplicable a la formación de ramificaciones, y no podemos utilizar los dos juntos.

Al llegar a este punto, hemos examinado ya toda una serie de métodos que permiten formar modelos de ramificación. Bien se generen al azar o por medio de reglas estrictas, la mayor parte de estos modelos se parecen superficialmente a árboles reales: la mayoría tienen gran cantidad de unas pocas ramas mayores y se distribuyen por el espacio con índices de bifurcación típicos de una gran variedad de fenómenos naturales. A continuación veremos cómo la Naturaleza, ciega y sin realizar cálculos matemáticos, construye en la realidad un árbol.



## 6. ÁRBOLES

*«Debemos estudiar la filotaxis, la pesadilla de la botánica, tan simple y, pese a ello, tan profunda como para resultar incomprensible.»*

E. J. Corner

De acuerdo con las observaciones de Robert E. Horton, cabría esperar que un árbol se extendiera en el espacio de forma que las ramas de un orden dado fueran de tres a cinco veces más numerosas que las del orden inmediatamente superior. Así, un árbol típico debería asemejarse a las imágenes de Lichtenberg de la figura 91. Aunque los árboles reales se parezcan superficialmente a estos modelos, difieren al menos en un aspecto: las ramificaciones de las figuras de Lichtenberg unen de manera uniforme tanto puntos interiores como exteriores, mientras que las ramas de los árboles, al formar una densa cobertura en la periferia con el fin de tener acceso a la luz solar, establecen contacto con un número relativamente escaso de puntos internos. En la región central de la copa, umbría y alejada de la luz, las pequeñas ramas mueren y los brotes no llegan a desarrollarse, debido a lo cual el tronco permanece allí desnudo y uniforme.

Si concebimos el árbol como un sistema de transporte de agua y nutrientes, como un modelo tridimensional de flujo, deberíamos suponer que sigue las leyes de Murray relativas al trabajo mínimo, de forma que las ramas menores formarán ángulos rectos con las de mayor tamaño y éstas constituirán ángulos agudos entre sí. Y, en efecto, éste parece ser el caso. Aun cuando el árbol no es un conducto hueco como una arteria y gran parte de su estructura se halla atravesada por pequeños y abundantes canales, las observaciones de Murray son válidas. En realidad, si tenemos en cuenta las



acusadas diferencias existentes entre los sistemas arteriales y los árboles, lo que resulta sorprendente es que las dos estructuras se asemejen tanto.

### Sistema de transporte en los árboles

La mayoría de los árboles cuentan con dos sistemas de transporte: uno para el agua y las sales minerales, denominado xilema, y otro para los nutrientes ya elaborados, el floema. Ambos trabajan ocasionalmente bajo presión positiva, con las raíces actuando como una bomba. Es la presión radicular la que nos permite obtener por sangrado del xilema el azúcar de arce para hacer con él jarabe, de la misma forma que posibilita a los pulgones sorber el floema del tilo. Con mayor frecuencia, sin embargo, el agua fluye hacia arriba a presión negativa: es atraída más que empujada.

La atracción proviene de la evaporación que tiene lugar en las hojas superiores del árbol, lo que hace que ésta ascienda como por una larga cadena. Podemos comprobar fácilmente que el agua no es absorbida bajo la acción del vacío, ya que en estas condiciones apenas asciende por encima de 10 m, mientras que en un árbol llega a alcanzar diez veces esta altura. Para que el agua suba como si fuera transportada por una draga, la columna de líquido tiene que ser continua y no deben formarse en ella burbujas de aire ni discontinuidades que obstaculicen el flujo. Al helarse el agua en invierno origina necesariamente la formación de burbujas en los conductos del xilema, las cuales deben ser eliminadas o bien han de constituirse nuevos conductos antes de que el flujo se reinicie en la primavera. Las paredes celulares podrían también bloquear el paso del agua, y por ello las células de los conductos del xilema deben morir y la zona intermedia de las paredes disolverse antes de que se forme un canal continuo. El conducto debe asimismo reforzarse, lo que se consigue mediante el depósito de lignina. Según Zimmermann:

«La estructura resultante, semejante al hormigón armado, impide el colapsamiento de las células cuando el agua asciende a través de ellas. Así, el xilema desempeña una doble función: no sólo

conduce el agua sino que también proporciona a la planta una rigidez estructural. Es como si el sistema de fontanería de una casa sirviera además de armazón estructural.»

El sistema de transporte, en el máximo de su capacidad, contiene un gran volumen de agua. Según el botánico E. J. Corner, es posible obtener cerca de un litro de agua «fresca, clara y con un ligero sabor a tierra» de un tramo de unos 3 m del junco de Indias.

En gran medida, es cierto que la forma global de un árbol viene determinada por su sistema conductor, al igual que, en una escala menor, la forma de la hoja es el resultado de la red de nerviaciones entrelazadas que la cruzan, hecho perfectamente comprendido por el artista Paul Klee, como muestran sus diseños de la figura 109. En palabras de Klee:



Fig. 109



«La forma plana que surge depende de las líneas interconectadas. Y allí donde la influencia de éstas termina, aparece el contorno de la hoja, el límite de la forma plana.»

Corner hace una nueva observación a propósito de las nerviaciones de las hojas:

«Los modelos de nerviación difieren de forma notable según los distintos tipos de planta y, si aquéllos fueran entendidos correctamente y pudieran ser descritos de forma adecuada, servirían como rasgos característicos de las especies vegetales, de la misma manera que las huellas dactilares lo son de los seres humanos.»

Si la afirmación de Corner es correcta, podríamos realizar un análisis de Horton de la red de nerviaciones de las hojas, a partir del cual obtendríamos un método estadístico de identificación de las mismas. Incluso sería posible automatizar este análisis por medio de técnicas de scanning computarizado y, sirviéndonos de las correlaciones estadísticas, trazar la evolución de las hojas con considerable exactitud.

Pero nuevamente debemos recordar las diferencias existentes

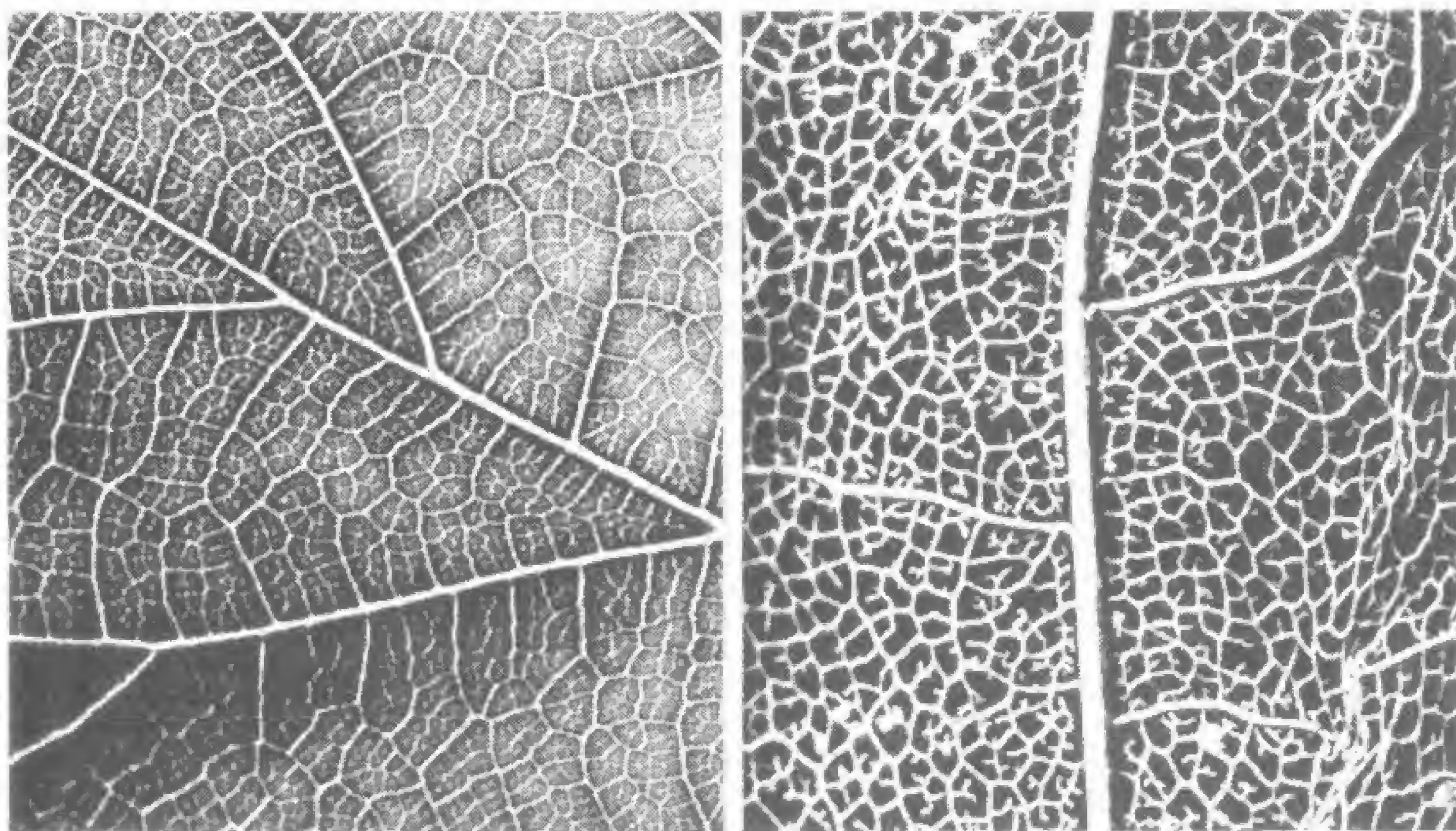


Fig. 110

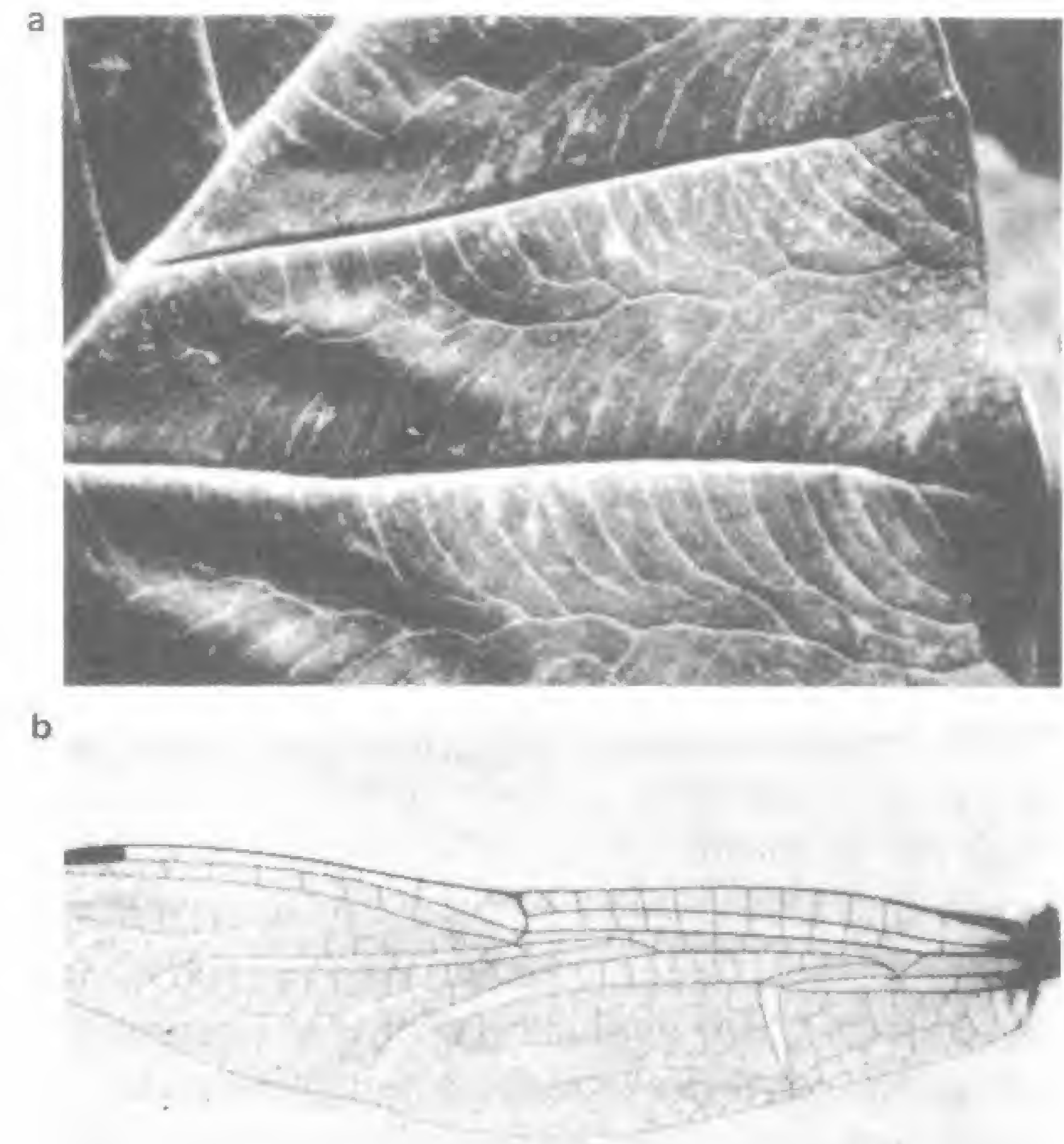


Fig. 111

entre los nervios de las hojas y las redes fluviales. Las nerviaciones foliares dividen la hoja en áreas separadas o «células» (macroscópicas, es decir, áreas irrigadas independientemente, y no microscópicas, o células propiamente dichas, cada una con su propio núcleo). Estas «células» aparecen con nitidez en la figura 110. El sistema fluvial no forma células cerradas, y tampoco los ríos fluyen hacia la periferia desde el centro del área de drenaje para constituir cursos periféricos, como las nerviaciones que pueden verse en la hoja de la figura 111a o, dentro del reino animal, en el ala de la libélula de la figura 111b.



## Evolución de los árboles

El sistema conductor de un árbol difiere aún en mayor grado de la configuración que presenta una red fluvial o una figura de Lichtenberg. El árbol hereda su patrón de ramificación y no fluye automáticamente desde las zonas más elevadas a las más bajas. Haciendo uso de la información genética contenida en la semilla, crece hacia arriba contra la fuerza de gravedad. Si la información no es apropiada para un entorno dado, la semilla no brota o, en caso de hacerlo, en seguida se marchita y muere. Si la información es errónea o hay en ella alguna alteración, la planta tampoco se desarrolla, excepto en los raros casos en que el error genético resulta ser ventajoso y da lugar al nacimiento de una nueva especie, más fuerte y mejor adaptada al entorno que la anterior. Lo sorprendente en la historia de la evolución es que, a pesar de las dificultades inherentes a la codificación de la información, de los sucesivos ensayos y errores y del fracaso o del éxito que conduce a la selección o a la extinción, aun con todo esto, la ramificación de los árboles se parece a la de los ríos. Árboles y ríos evolucionaron y se desarrollaron según sus propias leyes, de forma independiente y gobernados por fuerzas ciegas que, sin embargo, han producido modelos sorprendentemente similares.

La ramificación tiene lugar por todo el árbol, aun cuando las funciones de sus diferentes partes sean muy distintas. El tronco y las ramas actúan como soportes estructurales, mientras las raíces forman una red tridimensional de la cual salen directamente los elementos menores, los finos pelos radiculares que están protegidos por la tierra.

Las ramificaciones menores del sistema conductor del árbol, las finas nerviaciones, se agrupan para protegerse en hojas, las cuales se aplanan para exponer sus grandes superficies a la luz del sol, necesaria a fin de que se verifique la fotosíntesis. Cada parte, aunque distinta de las otras, se ramifica de forma que una serie de elementos más pequeños se añaden en la periferia a los elementos de mayor tamaño, que a su vez parten del centro del árbol. Ésta es la única instrucción que ha sobrevivido a los incontables cambios y modificaciones habidos en el curso de la evolución.



Fig. 112

Con respecto a estas modificaciones, es interesante observar que la evolución ha procedido simultáneamente en dos direcciones diferentes, tanto en el sentido de una mayor simplicidad, como en el de una complejidad creciente. Así, a diferencia del asno de Buridan, que, indeciso, no sabía cuál elegir entre dos puñados de heno situados a igual distancia de él, la Naturaleza se mueve fácilmente en direcciones opuestas. En unos casos agrupa las hojas pequeñas para formar unidades de mayor tamaño, y en otros, divide las hojas grandes con objeto de constituir unidades menores. Su mano derecha no sabe lo que hace la izquierda, por ello cuando un sistema es casi tan bueno como otro, simplemente desarrolla ambos.

En relación con la consolidación de las hojas, observamos en la figura 112 (tomada de Corner, 1964) cómo los ejes centrales de los folíolos se convierten en las nerviaciones de las hojas mayores y cómo éstas a su vez se fusionan para formar una única hoja. Un gran número de árboles tienen hojas lobuladas, como el roble y los arces, y aún en mayor medida el sicomoro y la morera. Estas hojas muestran un estadio intermedio en su fusión y en ellas las hojas pri-



Fig. 113



a

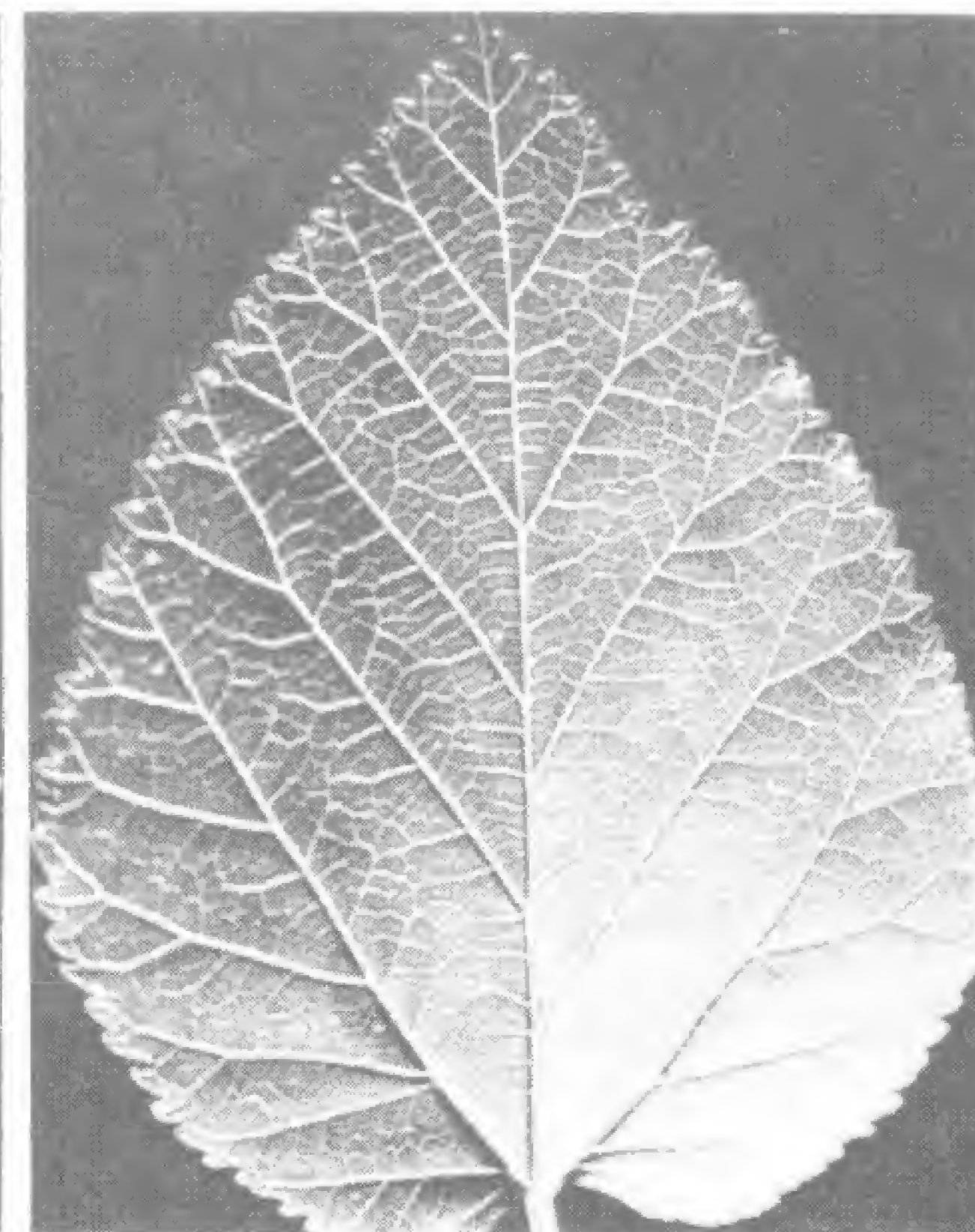
mitivas se hallan sólo parcialmente unidas. En la figura 113, por ejemplo, vemos tres hojas de una misma morera en diferentes estadios de consolidación evolutiva.

Si bien esta fusión simplifica el contorno de la hoja, complica en gran medida sus nerviaciones, pues éstas reflejan la ramificación original de los primitivos folíolos. Las nerviaciones, por tanto, constituyen un excelente registro de la historia evolutiva de las hojas. Obsérvese la variedad de procesos evolutivos que revelan las nerviaciones sencillas de la uva de mar (*Coccoloba uvifera*) de la figura 114a, los tres nervios mayores de la *Miconia magnifica* de la figura b, las complejas redes de nervios de la *Alcocalia watsoniana* en c y la hoja de la begonia en d (las tres primeras fotografías fueron tomadas en el Fairchild Tropical Gardens de Miami, Florida).

Por otra parte, una hoja de gran tamaño puede fragmentarse en un gran número de otras más pequeñas. Las ventajas de este proceso son evidentes: forman un conjunto más compacto que las hojas mayores, se dañan con menos facilidad y son sustituidas más rá-



b

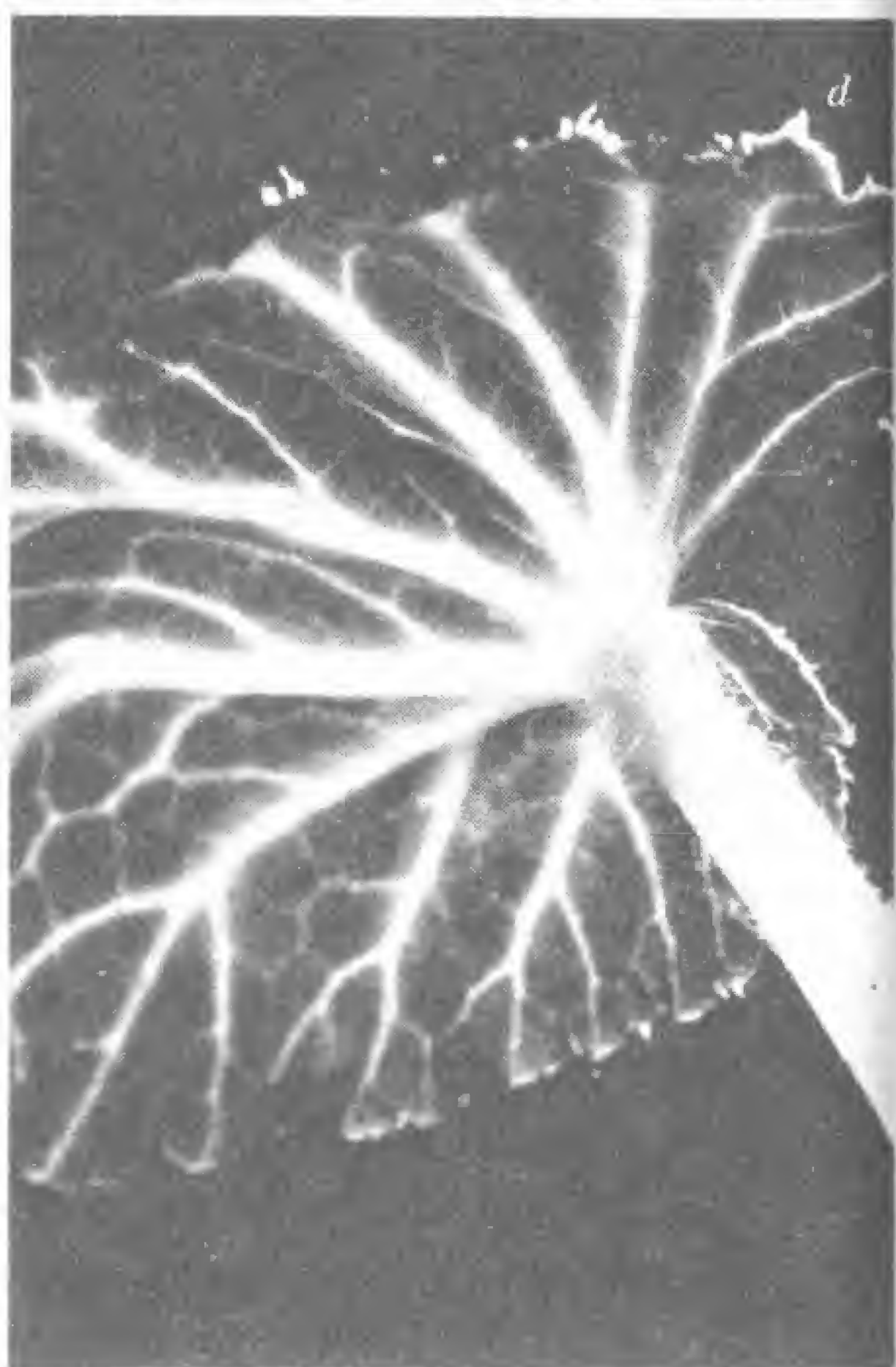
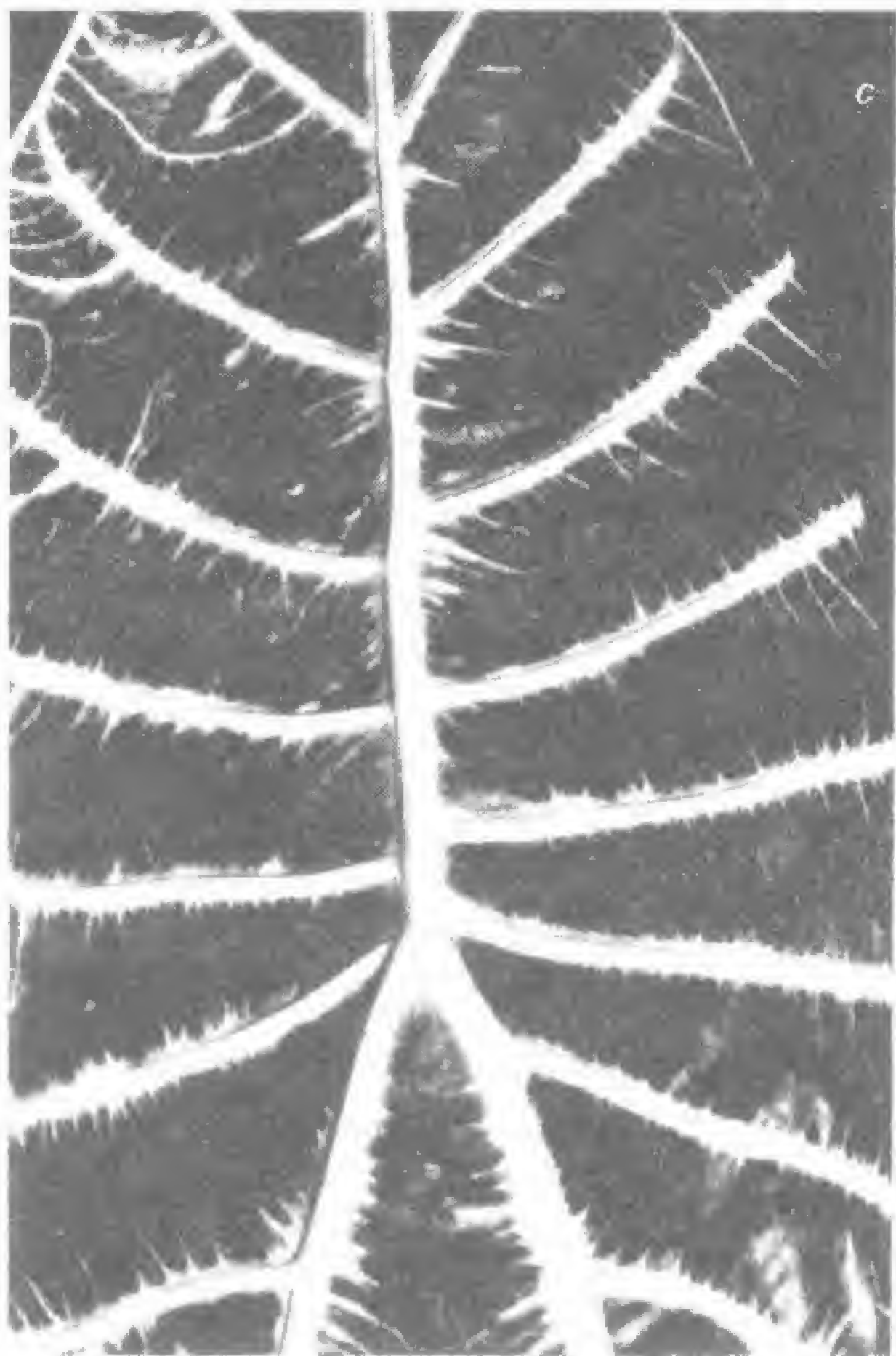
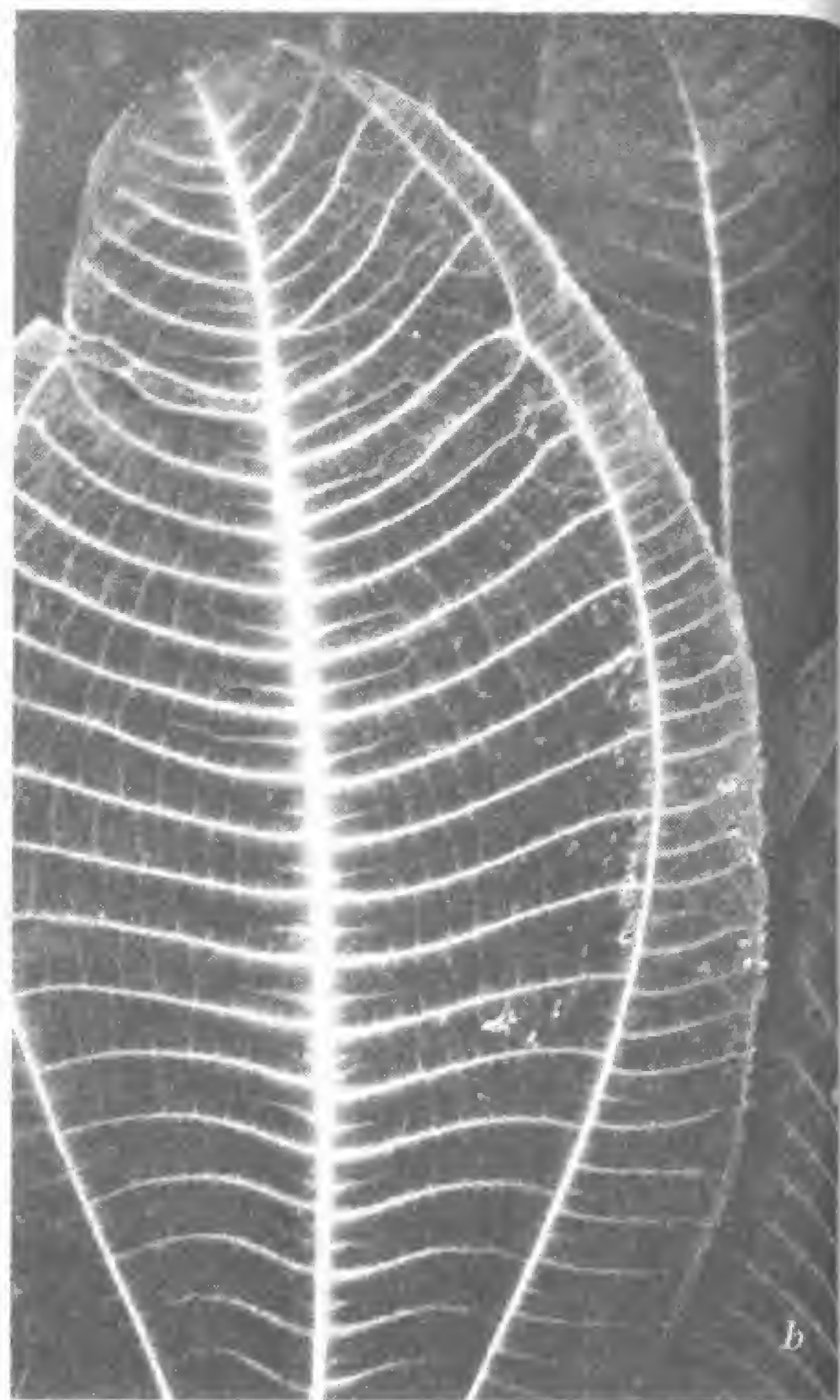
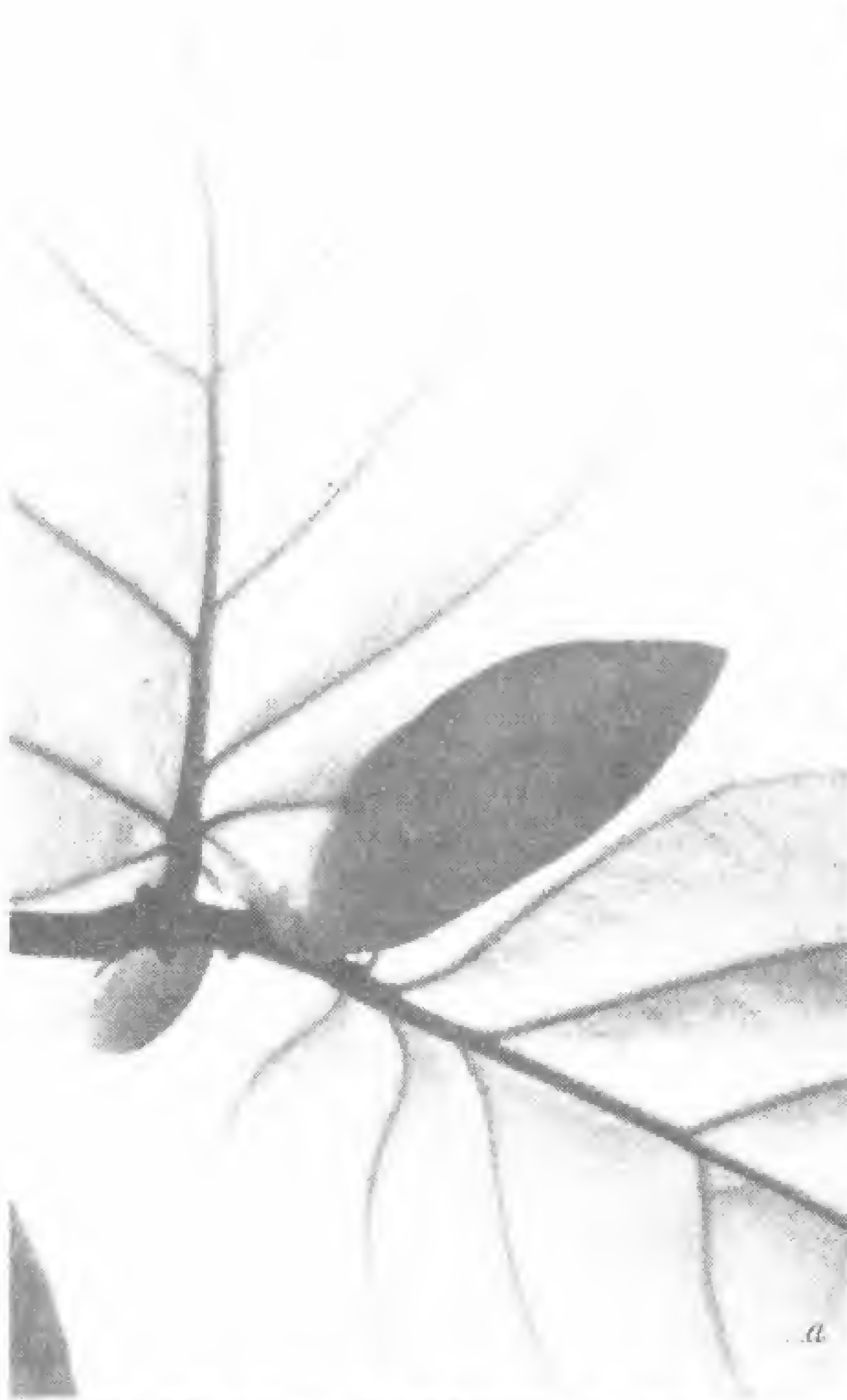


c

pidamente. La figura 115a muestra una gran hoja de filodendro en pleno proceso de fragmentación en unidades menores. La sencillez de las nerviaciones nos indica que la hoja se está fragmentando, y no fusionando como ocurre en la hoja de morera. La hoja de filodendro puede estar evolucionando en el sentido de producir un mosaico de hojas menores, como las del haya, el sauce o como la del helecho de cabellera (*Adiantum tenerum*) de la figura 115b (fotografiado también en el Fairchild Tropical Gardens).

Otra ventaja de las hojas pequeñas estriba en que permiten al árbol adoptar diferentes modelos de crecimiento en entornos distintos. Las hojas gigantes de la palmera crecen con una simetría rigurosamente espiral, idéntica en el norte y en el sur, a barlovento o a sotavento. Compare el lector las palmeras de la figura 121, cuyas hojas muestran un riguroso desarrollo geométrico, con las pequeñas hojas que el olmo extiende en sus ramas, de crecimiento más bien libre, como las que aparecen en la figura 116. El olmo ocupa todo el espacio posible de su entorno con una estructura construida en





◀ Fig. 114

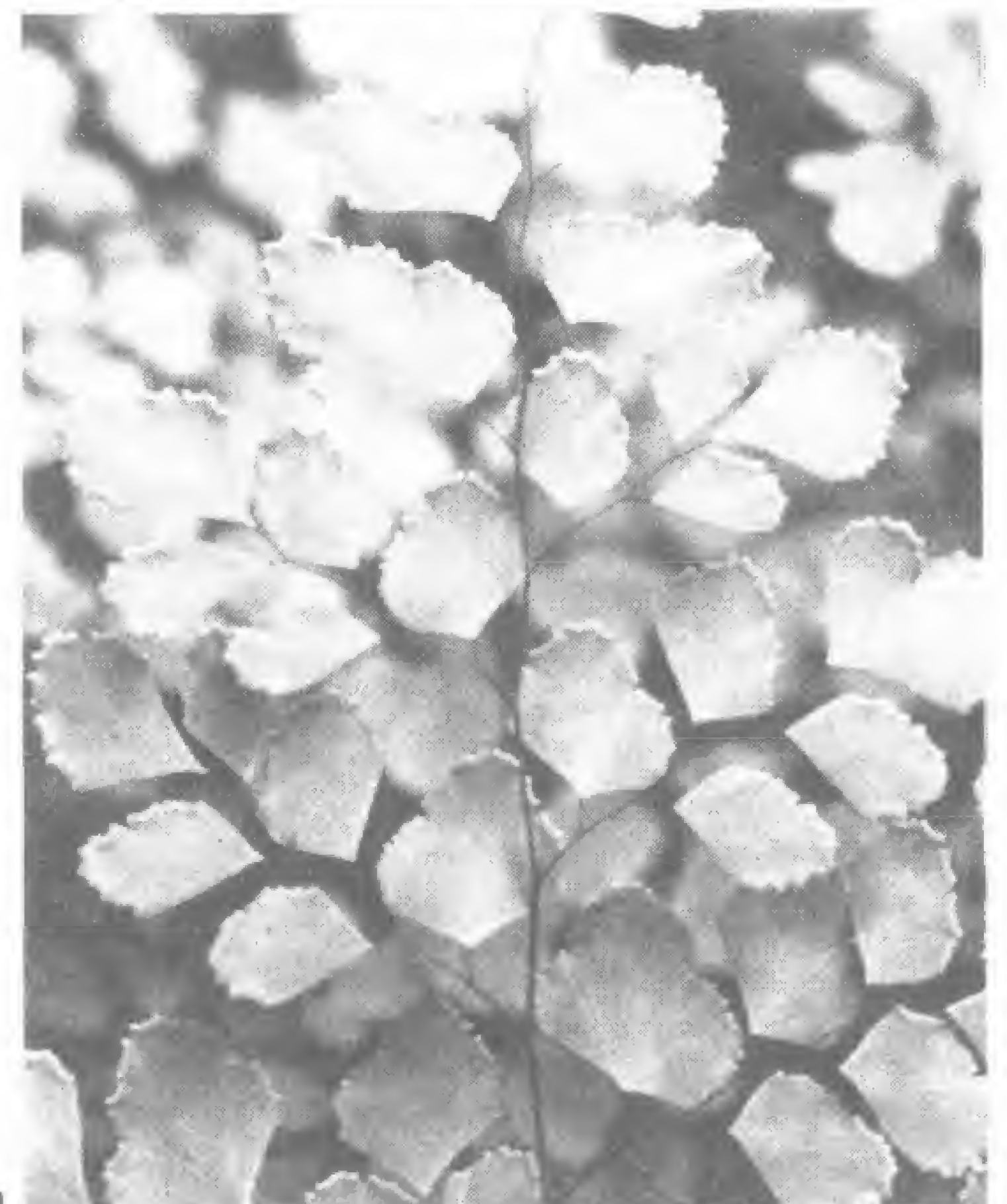
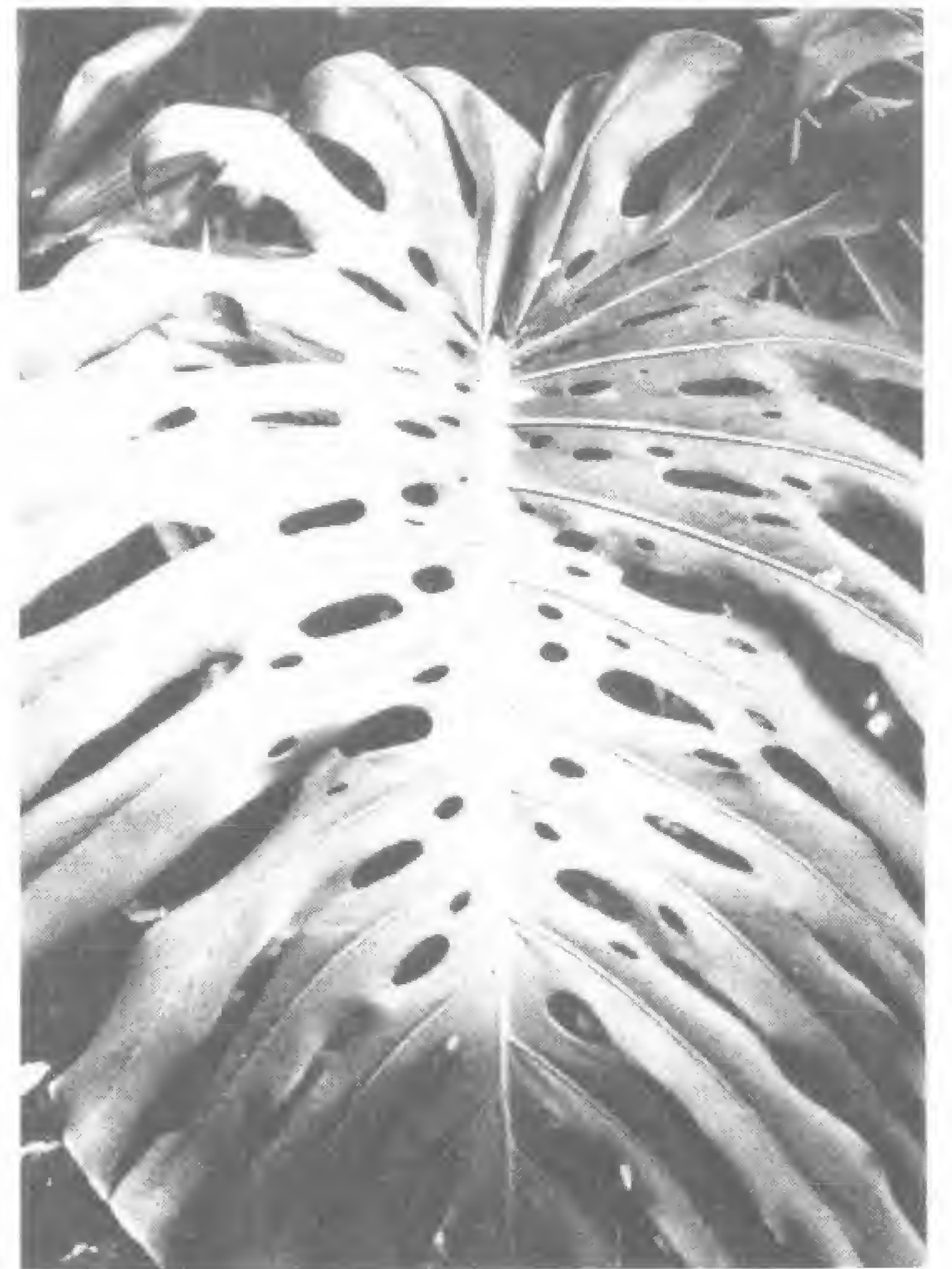


Fig. 115



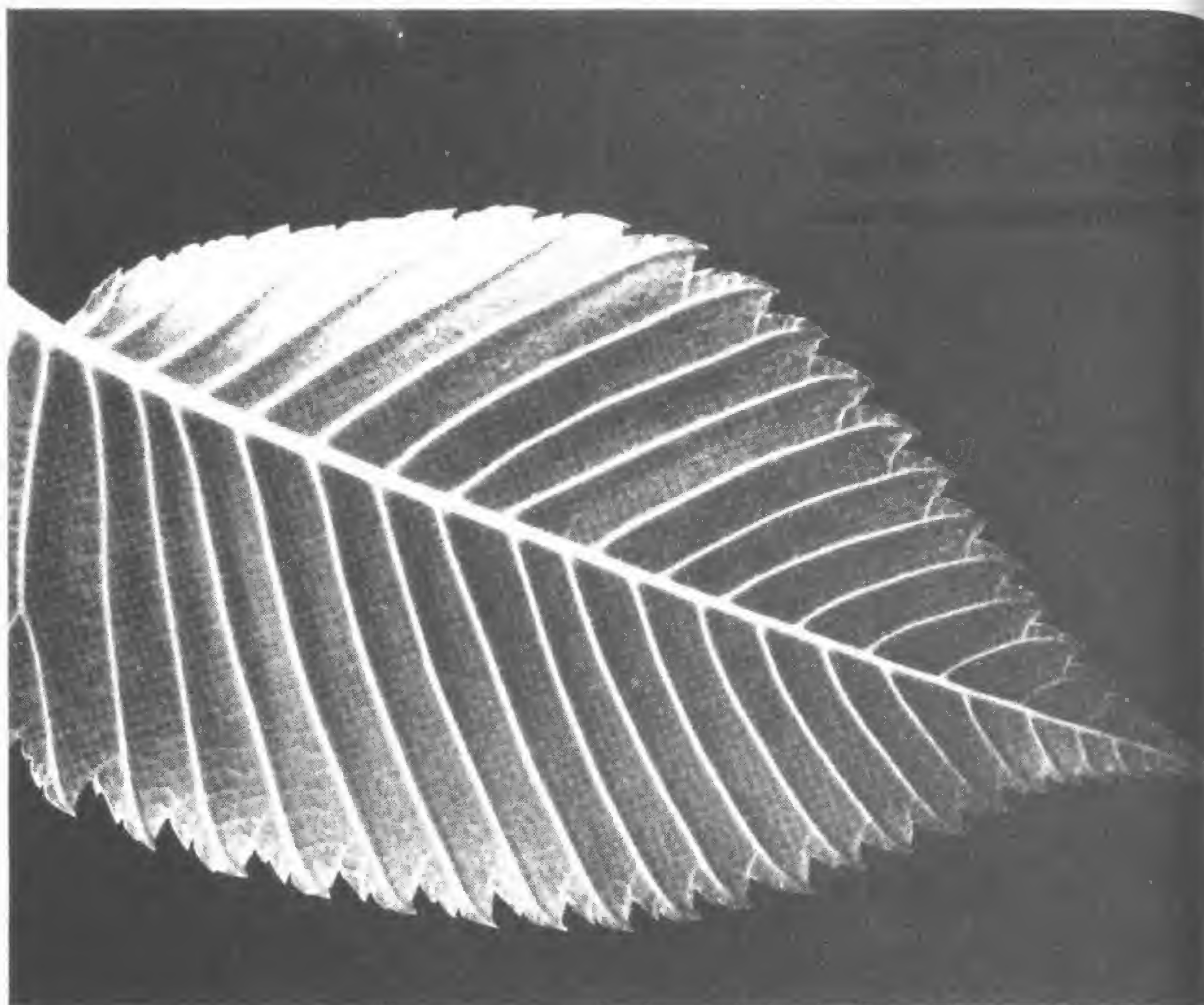


Fig. 116

particular para esa ocasión, mientras que la palmera edifica siempre ateniéndose al mismo modelo, sean cuales sean las circunstancias en que se desarrolla.

### Meristemos

Evidentemente, cualquiera de las dos tendencias, bien la fusión de hojas o su fragmentación, supone una modificación de las ya existentes. El árbol no puede decidir de repente hacer hojas de gran tamaño o formar un número dado de pequeñas hojas allí donde no existe ninguna: tan sólo puede modificar una ordenación pre-existente.

Las partes más importantes de un árbol, aquellas que deben determinar modificaciones en la morfología del mismo, son las yemas, integradas por tejido meristemático. El árbol no puede experimentar nuevo crecimiento en cualquier punto de su estructura, sino sólo en las zonas en las que existen meristemos, cuyas células poseen la capacidad de multiplicarse y dar lugar a nuevos órganos y tejidos. El crecimiento de los meristemos, que sólo tiene lugar en determinados puntos, se ha desarrollado en los árboles debido a que el nuevo tejido es tan frágil que no puede soportar su propio peso y debe ser sostenido por partes ya engrosadas y desarrolladas que han perdido la capacidad de multiplicarse. La especialización en el árbol es similar a la que tiene lugar en una colmena; el meristemo, al igual que la abeja reina, es mantenido por otras partes del organismo vegetal que han renunciado a la capacidad reproductiva.

Una especialización semejante se da en las manchas de tinta que veíamos en el capítulo 4. Allí el crecimiento aparecía en primer lugar en las puntas de las espinas, mientras la tensión superficial mantenía el resto de la mancha unida para impedir la formación de nuevas áreas de crecimiento. Un gran número de plantas muestran un crecimiento apical similar, en el que la división celular se produce sólo en las puntas o ápices de las ramas. Sin embargo, al contrario de lo que ocurre en las espinas de la mancha de tinta, que inhiben indirectamente el crecimiento de las partes adyacentes, el meristemo apical produce hormonas que inhiben de forma directa el crecimiento de otras partes. Así, si se elimina una yema terminal,



las regiones situadas inmediatamente por debajo de la misma dejan de estar inhibidas y dan lugar a nuevas yemas, mientras que, si la yema terminal se mantiene intacta, las regiones inferiores permanecen en estado latente.

En las palmeras, el meristemo apical presenta un desarrollo muy singular. En lugar de crecer en la forma en que se expande el fuego, por ejemplo, por medio del continuo avance de sus partes externas, la hoja crece de manera similar a como lo hace la pasta dentífrica saliendo del tubo cuando éste se aprieta: es empujada desde abajo. Por consiguiente, el meristemo apical se transforma en este caso en un meristemo basal. Este tipo de crecimiento caracteriza a las plantas de la familia de las palmáceas y similares, así como a las gramíneas y a las bulbosas, tanto lirios como cebollas, jacintos o crocus: todos ellos crecen desde la base y rodean sus sensibles meristemas basales con vainas protectoras u hojas engrosadas (figuras 117 y 51). Esta forma de crecimiento permite, por supuesto, cortar la parte superior de la planta sin destruir ésta. Así, puede segarse el césped, de la misma forma que es posible cortar el cabello, con la seguridad de que volverá a brotar.

Además de empujar la hoja lejos de su punto de crecimiento, el meristemo basal de la palmera hace crecer el tronco en altura. Por tanto, podemos decir que, en cierto sentido, produce un crecimiento en dos direcciones, de manera similar a lo que ocurre apretando el centro de un tubo de pasta dentífrica. Se ha descubierto un extraordinario meristemo de doble crecimiento en el kelp gigante, que hace que éste se desarrolle decenas de metros a partir de un único punto situado entre el eje principal y la ramificación.

Otra especialización del meristemo tiene lugar en el cámbium de los árboles, la capa circular de células que se halla bajo la corteza y que produce al multiplicarse aquéllas el crecimiento en grosor del tronco. En algunos casos, como en el *Pinus aristata* de California, este crecimiento se prolonga por espacio de hasta 4.600 años. El cámbium permite el endurecimiento de los tejidos internos del tronco, lo que hace posible sostener una elevada copa. Los árboles que carecen de cámbium y poseen un tronco homogéneo y sin endurecer, como las palmeras, presentan un menor desarrollo de la copa.

El *Xantorrhoea* de Australia sigue una estrategia diferente: man-

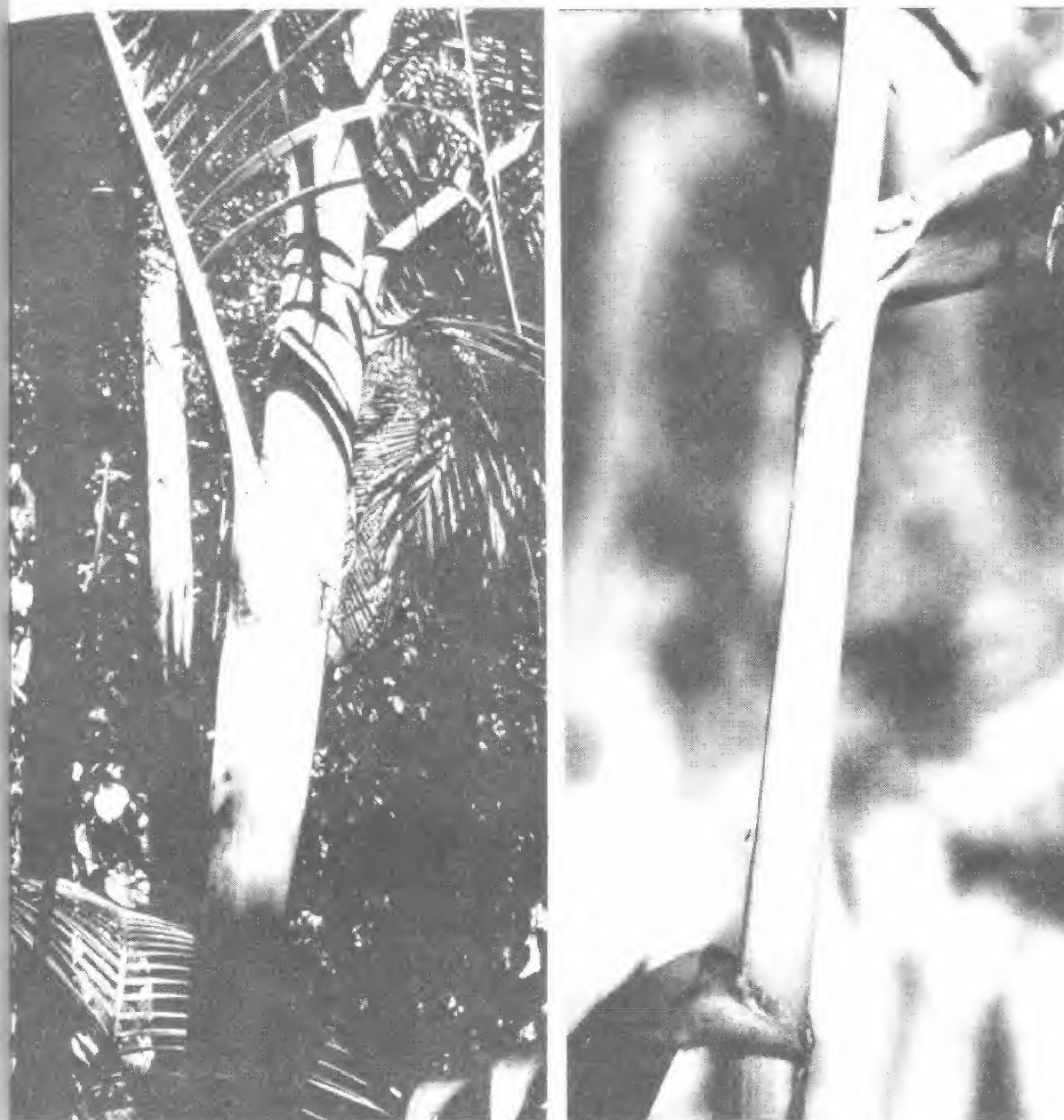


Fig. 117

tiene sus delicados tejidos de crecimiento en el interior del tronco y envía savia a las zonas periféricas, donde aquélla se solidifica y forma una consistente estructura de sostén. Tanto si los puntos de crecimiento se encuentran situados en las zonas internas, como en la periferia, en los extremos de las ramas o en la base, han sufrido una especialización, como de hecho ocurre con las restantes estruc-



turas y tejidos del árbol. Cada parte se ha adaptado para desempeñar su tarea respectiva.

La especialización de los meristemos produce una especialización y limitación de los modelos posibles de crecimiento. Un árbol no puede adoptar con idéntica probabilidad cada una de las configuraciones de Shreve, que son notablemente distintas entre sí, sino que se limita a seguir aquel modelo que la distribución de sus puntos de crecimiento le dicta y, más aún, el modelo que el meristemo individual puede producir. Los meristemos se circunscriben no sólo a una ordenación espacial sino más específicamente a los tipos de crecimiento a que pueden dar lugar.

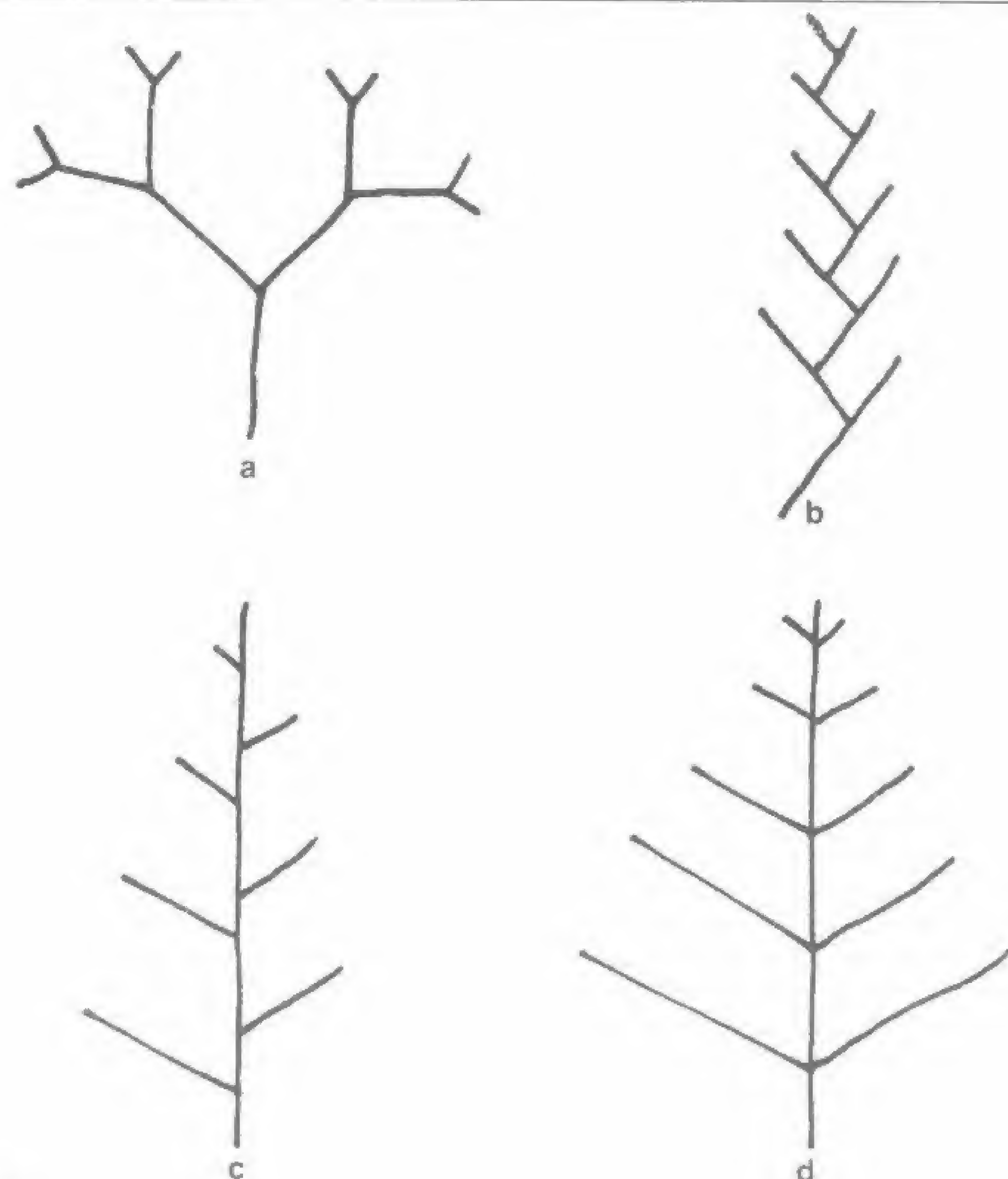


Fig. 118

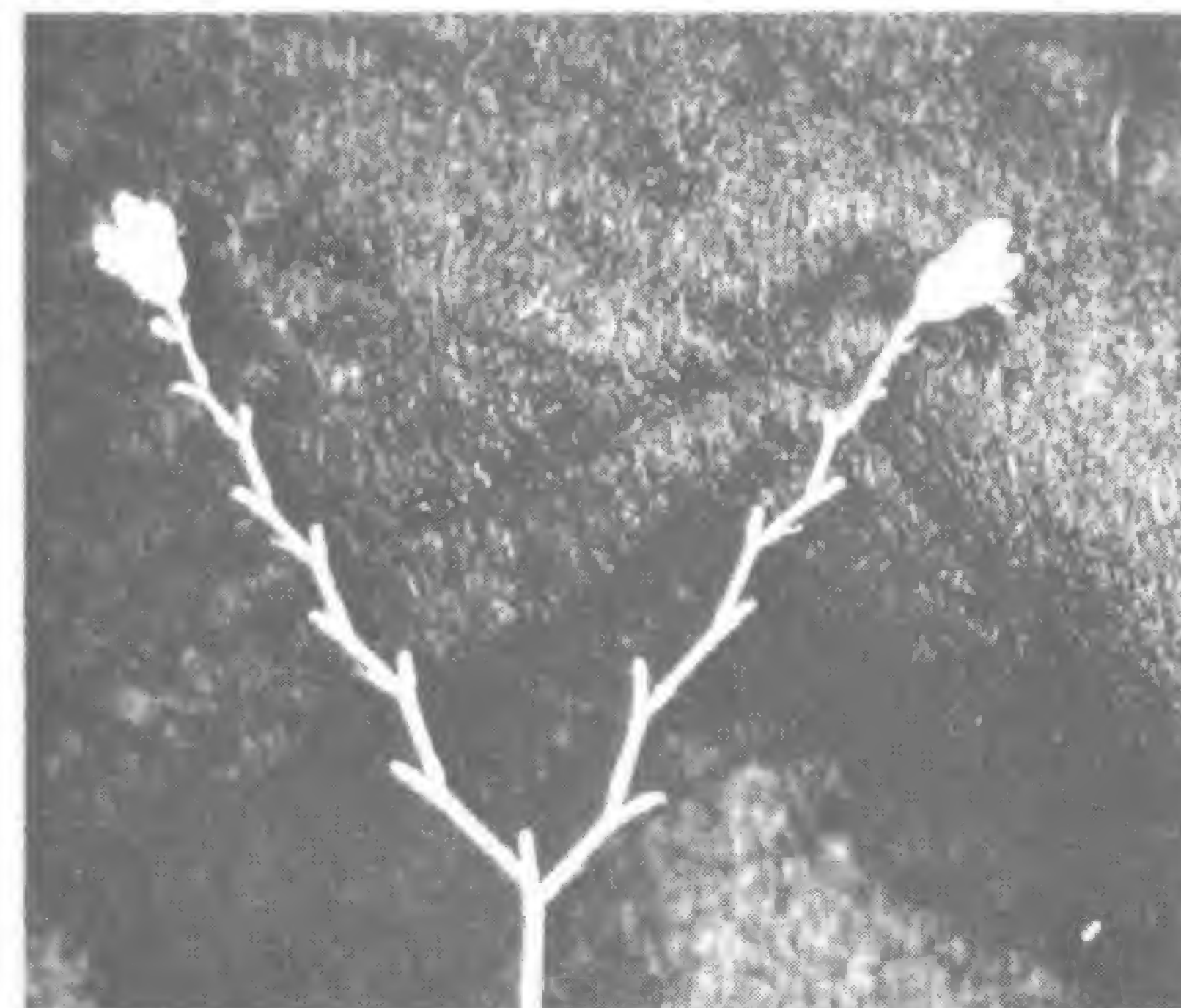


Fig. 119

### Modelos básicos de crecimiento

El modelo más primitivo de crecimiento en las plantas se representa en las figuras 118a y 98: es la denominada ramificación dicotómica, en la que el meristemo apical de cada rama origina dos ramas iguales, cada una de las cuales se divide a su vez en otras dos. Un número reducido de plantas se ramifica de esta forma, entre ellas algunos lycopodios y algas. Se ha sugerido que todas las palmeras descienden de un antepasado de ramificación dicotómica, si bien en la actualidad sólo las palmeras del género *Hyphaene* presentan esta característica.

Si las ramas duplicadas crecen de forma desigual y uno de los elementos se desarrolla más que el otro, ello da origen a un modelo en zigzag, como el que muestra la figura 118b, típico de las campanillas de coral (*Henchera sanguinea*) de la figura 119.

Resulta fácil imaginar a los elementos menos desarrollados del modelo anterior produciendo hojas y dividiéndose de nuevo para transformarse en ramas laterales en la denominada disposición alterna que se muestra en la figura 118c. En la figura 120 se ven



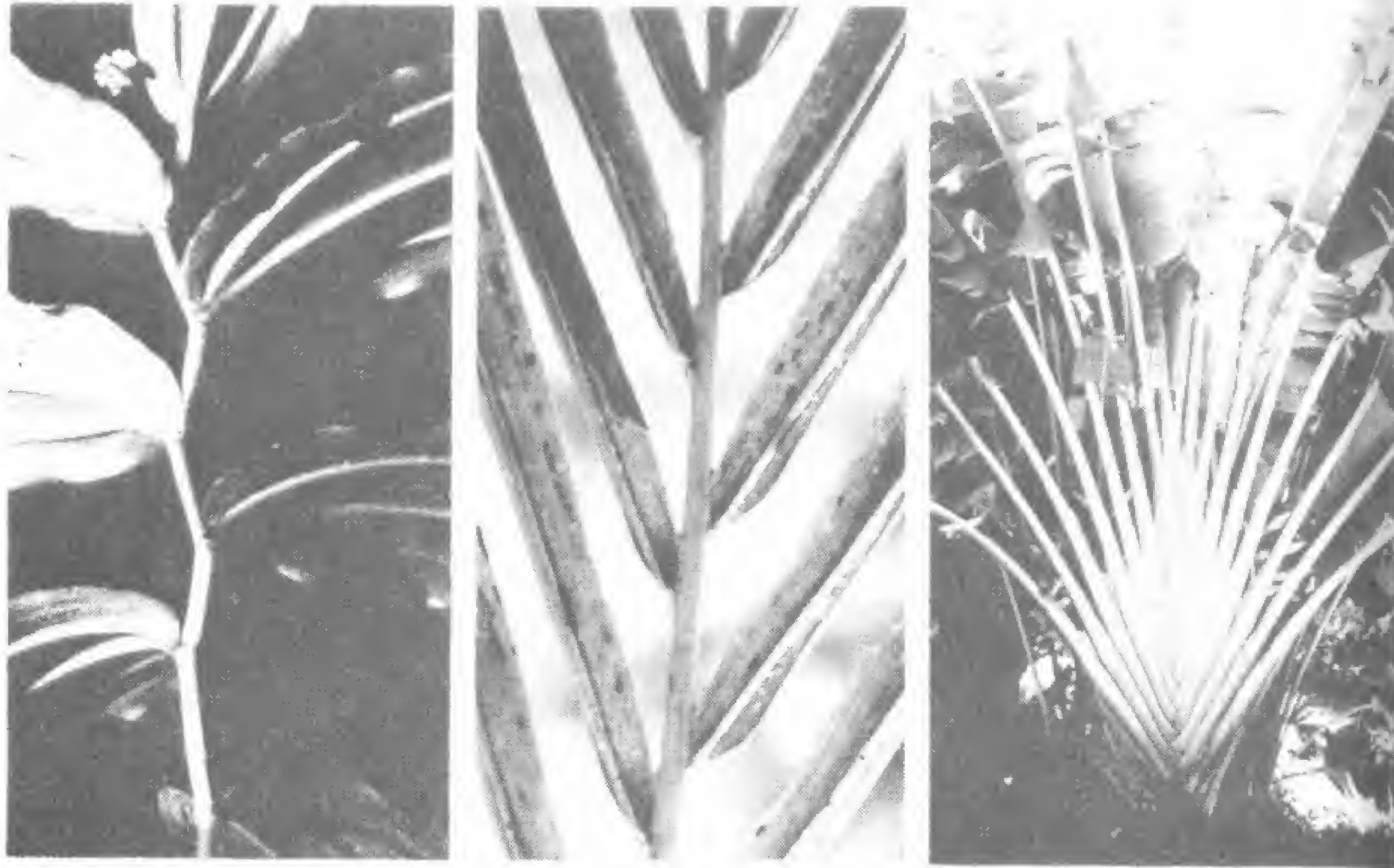


Fig. 120

algunas hojas del falso sello de Salomón, varios folíolos de la hoja de cocotero y otros de la palma del viajero (género *Ravenala*), todas ellas creciendo de forma alterna en el tallo.

El siguiente estadio evolutivo parece haberse producido cuando las ramas laterales aprovecharon la tercera dimensión para crecer en espiral alrededor del tallo. Hasta ese momento, las plantas, al igual que nuestros diagramas y dibujos, eran básicamente bidimensionales.

Las palmeras, probablemente las plantas angiospermas más antiguas que existen, proporcionan el ejemplo más notable de sucesión espiral de las hojas. Recientemente, una caricatura aparecida en un periódico de una ciudad del norte de Estados Unidos mostraba a dos naufragos en una isla desierta del trópico, uno de los cuales, mientras recogía hojas de palmera, señalaba a su amigo: «¿Sabes, Carl? Verdaderamente odio el otoño.» La historieta sólo tendría sentido para un norteamericano, pues la gente familiarizada con las palmeras sabe que no experimentan la caída de la hoja sino que és-



Fig. 121

tas van cayendo a lo largo de todo el año, por lo general a un ritmo de una al mes. Cuando una nueva hoja surge en lo alto de la espiral, una vieja muere y cae en la parte basal. De esta forma, la copa de la palmera contiene siempre el mismo número de hojas, que en el cocotero son unas treinta (fig. 121a); y, en este caso concreto, ya que las hojas caen a intervalos de un mes, cada una de ellas es funcional durante aproximadamente unos treinta meses. Una sucesión espiral similar y análogo intervalo de tiempo regula el desarrollo de la hoja en el brote, de manera que la vida completa de la hoja, desde su inicio en el interior de la yema hasta su caída del árbol, es de  $2 \times 30$  meses, o cerca de 5 años.

El crecimiento secuencial de las hojas hace posible calcular la edad de una palmera sumando la edad de sus hojas a la del tronco, determinada esta última por el número de cicatrices foliares que lleva. La cicatriz foliar del cocotero tiene forma de media luna y permanece visible en el tronco una vez que la hoja se ha desprendido de éste. En algunas palmáceas, estas cicatrices constituyen auténti-



cos tallos foliares que sobresalen como colmillos, caso por ejemplo de *Corypha elata*, que aparece en la figura 121b (fotografía tomada en el Fairchild Tropical Gardens). Multiplicando el número de cicatrices foliares del tronco de una palmera por el intervalo de tiempo que separa el crecimiento de dos hojas sucesivas, se obtiene la edad del tronco. Por tanto, si se suma la edad de las hojas, el tiempo de crecimiento del árbol antes de que el tronco se desarrolle (unos cinco años para el cocotero) y la edad del tronco, puede obtenerse la edad total del árbol. Éste es el único método que permite determinar con certeza la edad de una palmera, ya que el tronco carece de anillos de crecimiento anuales que permiten el recuento: el xilema y el floema no forman capas concéntricas de cámbium con períodos alternativos de actividad y reposo. Los conductos son funcionales durante todo el tiempo y se distribuyen de manera uniforme en el tallo pulposo, como las fibras en un trozo de apio.

E. J. Corner señala aún otra consecuencia del desarrollo secuencial de las hojas de palmera.

«Una deducción más compleja nos permite comprender las diferencias de envergadura existentes entre las distintas palmeras. Si, para simplificar, se supone que todas las hojas de palmera crecen a la misma velocidad, una hoja de gran tamaño tardará más tiempo que una pequeña en desarrollarse y tendrá una vida funcional mayor, igual a su período de crecimiento. Pero una hoja grande requiere un tallo grueso para sostenerla y un aporte de nutrientes mayor. Un tallo grueso en las palmeras significa una cabellera robusta y, a igualdad de otros factores, dicha cabellera producirá más hojas que otra menor. Por tanto, las palmeras que presentan troncos robustos tendrán copas con hojas numerosas, grandes y longevas, mientras que las que tienen troncos más bien delgados mostrarán copas pequeñas, con pocas hojas, de menor tamaño y de vida relativamente más corta. Esto es con toda exactitud lo que se observa...»

Un tipo de filotaxis (u ordenación de las hojas) en espiral es común a otras muchas plantas y árboles, además de las palmeras, y lo estudiaremos en breve con mayor detalle. Aparte de los modelos de crecimiento en espiral y los helicoidales, hay otro completamente



Fig. 122

distinto, que se desarrolla cuando el eje de la hélice se comprime como si fuera un muelle, de forma que la planta, en lugar de echar sus hojas una después de otra, forma verticilos de hojas o ramas que rodean completamente el tallo. La figura 122 muestra el pino de la isla de Norfolk, a todo lo largo de cuyo tronco brotan verticilos de ramas a intervalos sucesivos. Dichos verticilos pueden ir seguidos de otros situados más arriba en el tronco, y cada uno de ellos puede girar en relación con el que se halla más próximo a él. Los pétalos de las flores también se insertan en grupos y, lo que resulta muy interesante, el número de pétalos en una flor es a menudo uno de los términos de las series de Fibonacci. Así, por ejemplo, en el iris hay 3 pétalos; en la primavera, 5; en la hierba lombriguera, 13; en la caléndula, 21, y 34, 55 y 89 en diferentes especies de margaritas.



Los verticilos de dos hojas, en los cuales cada una crece opuesta a la otra, son también muy corrientes. Estos verticilos de doble hoja pueden girar mientras ascienden por el tallo, como ocurre en *Gypsophila*, en la lantana y la menta, o bien situarse en el mismo plano, como se esquematiza en la figura 118d; este modelo lo presentan el nogal, el fresno y el zumaque. En África crece una curiosa planta, *Welwitschia mirabilis*, que alcanza los 30 cm de altura y los 90 cm de diámetro y tiene un único verticilo de dos hojas, las cuales pueden crecer de forma continuada durante miles de años, muriendo y deshilachándose por sus extremos y formando en el suelo algo similar a un montón de hojarasca.

Interesa resaltar con respecto a estos modelos que los mismos se encuentran determinados directamente por las divisiones celulares que tienen lugar en sus meristemos. Además, puesto que todos los meristemos de una planta dada son idénticos, el modelo de crecimiento es igual para todas las partes de la planta. La única variación estriba en si dicho modelo se desarrollará completamente y si cada yema dará lugar a hojas. El modelo posible se halla ya fijado, lo que variará es la ejecución del mismo. Además, puesto que, como ya Leonardo da Vinci había observado, «las ramas siempre surgen encima de la hoja», esto es, en la bifurcación existente entre el peciolo y el tallo, es la filotaxis (ordenación de las hojas en el tallo) la que fija la disposición de las ramillas más finas en las ramas secundarias, y la de éstas en las ramas mayores a medida que el crecimiento prosigue. La filotaxis determina asimismo las formas de las flores, e incluso la ordenación de los órganos reproductores dentro de éstas.

Tomemos como ejemplo la lila.

La figura 123a representa una sección transversal de la yema de una lila, en la que podemos ver los primordios foliares comprimidos y agrupados por pares que se sitúan en ángulo recto los unos con respecto a los otros. Las figuras 123b y c muestran pares típicos de ramas vegetativas y florales, respectivamente, y en d se observa un par mixto, menos común, en el que una de las ramas ha desarrollado hojas y la otra flores. En esta misma fotografía vemos que la ordenación en cruz o decusada que se advertía ya en la yema se mantiene tanto en las hojas como en los grupos de brotes florales, es

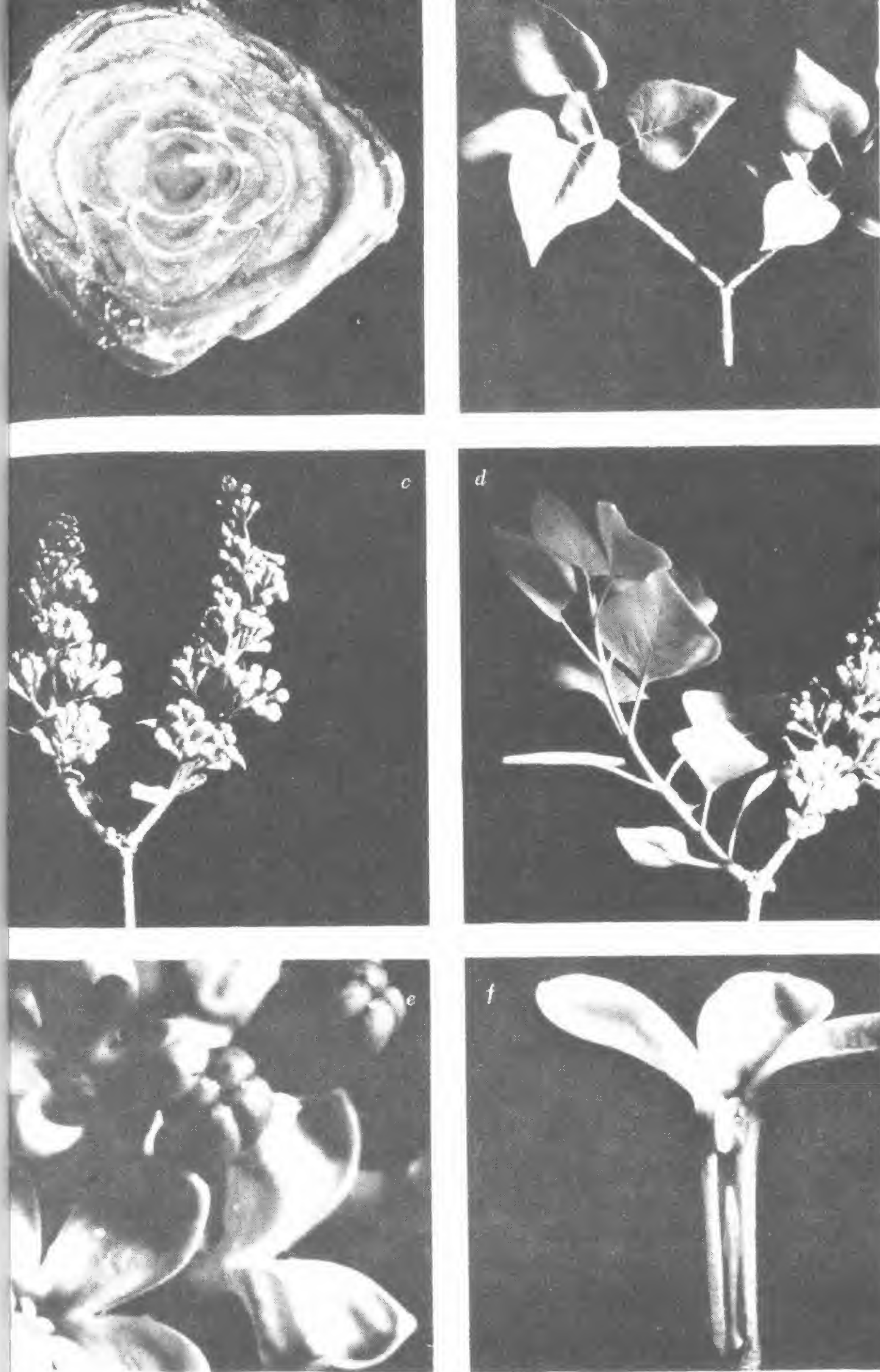


Fig. 123 ►



decir, que las hojas y brotes se disponen en el tallo por parejas, de forma que cada pareja se cruza en ángulo recto con el par situado inmediatamente por encima y por debajo. Así pues, las hojas crecen del mismo modo que lo hacían en la yema y el único cambio consiste en el alargamiento experimentado por el tallo. En la figura 123e comprobamos que la flor sigue el mismo modelo. Los dos pares de pétalos se unen para dar lugar a una flor tetrámera. Cuando uno de los pétalos se separa, como puede verse en la figura 123f, observamos que los dos estambres se insertan directamente en uno de los pares de pétalos, en tanto que debajo, y alineado en ángulo recto con ellos, se sitúa el estigma bilobulado al cual se adhieren los granos de polen. Así, vemos cómo yemas, hojas, ramas, pétalos y órganos reproductores de la flor son variaciones del mismo tipo de ordenación decusada.

Era precisamente esta lógica estructural de las formas orgánicas lo que tanto impresionaba a Frank Lloyd Wright.

«A lo largo del borde del camino nos atraen algunas flores de color inusualmente intenso. Aceptamos llenos de gratitud su perfecta belleza, pero cuando intentamos descubrir el secreto de su encanto hallamos que la flor, cuyo reclamo más evidente atrajo en primer lugar nuestra atención, está íntimamente relacionada con la textura y la forma de su follaje. Descubrimos una extraña y singular correspondencia entre la forma de la flor y el sistema mediante el cual las hojas se han ordenado en torno al tallo. A partir de aquí todo nos induce a observar un patrón de crecimiento característico y la consiguiente naturaleza de su estructura...»

Otro arquitecto, Le Corbusier, cuyo boceto se reproduce en la figura 124, fue impresionado de forma similar por la lógica del crecimiento en las plantas.

«Estoy en las montañas, dibujando un viejo abeto que se yergue en medio del pasto. Descubro una ley. Mira, digo a mi maestro, puedo decir la edad del árbol a partir de su rama más vieja. He aquí tres brotes de este mismo año, cada uno con sus tres yemas: (a) determinará el crecimiento del próximo año; (b) y (c) se abrirán hacia afuera y cada uno de ellos dará lugar a su vez a tres brotes con tres yemas cada uno. La ley está enunciada. La rama

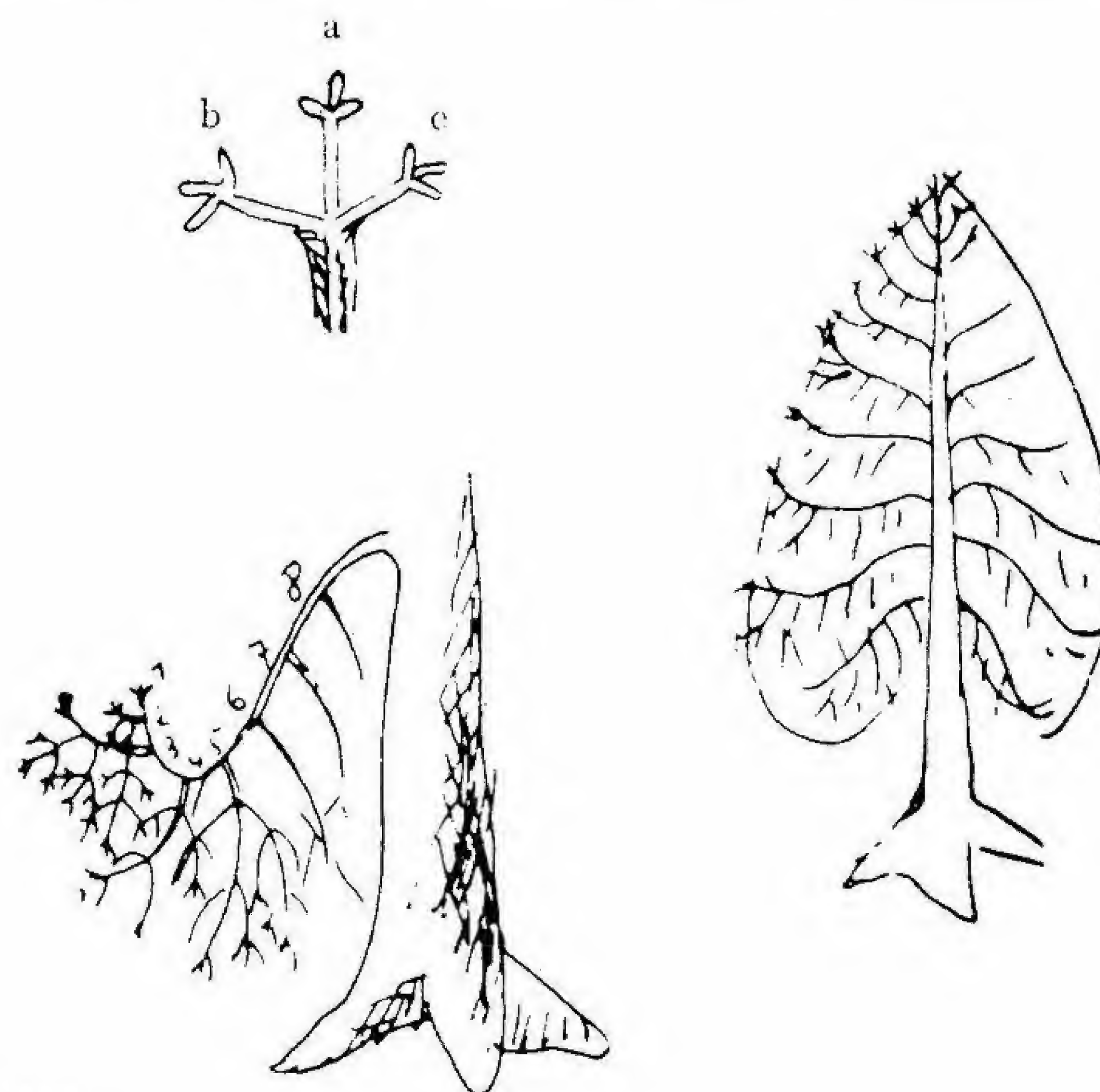


Fig. 124

más vieja, la que se halla más cercana al suelo, inicia casi con certeza series ordenadas de nuevos brotes. Y el árbol entero es una pura función matemática (esto no constituye una afirmación tajante, no he tenido nunca la oportunidad de demostrarla).»

Si el árbol se ramifica siempre de la misma manera, ¿qué regularidad posee su forma total? ¿Es cierto, como suponía Le Corbusier, que el árbol supone una función matemática? Para contestar estas preguntas, veamos otro ejemplo de crecimiento, el del arce, que presenta el mismo modelo de ramificación decusada que la lila.

La figura 125a muestra un par de flores típicas situadas al extremo de la rama dividida. Las figuras 125b y c representan la ordenación decusada de los peciolo de las hojas, en los que cada par forma ángulos rectos con el par situado inmediatamente por encima



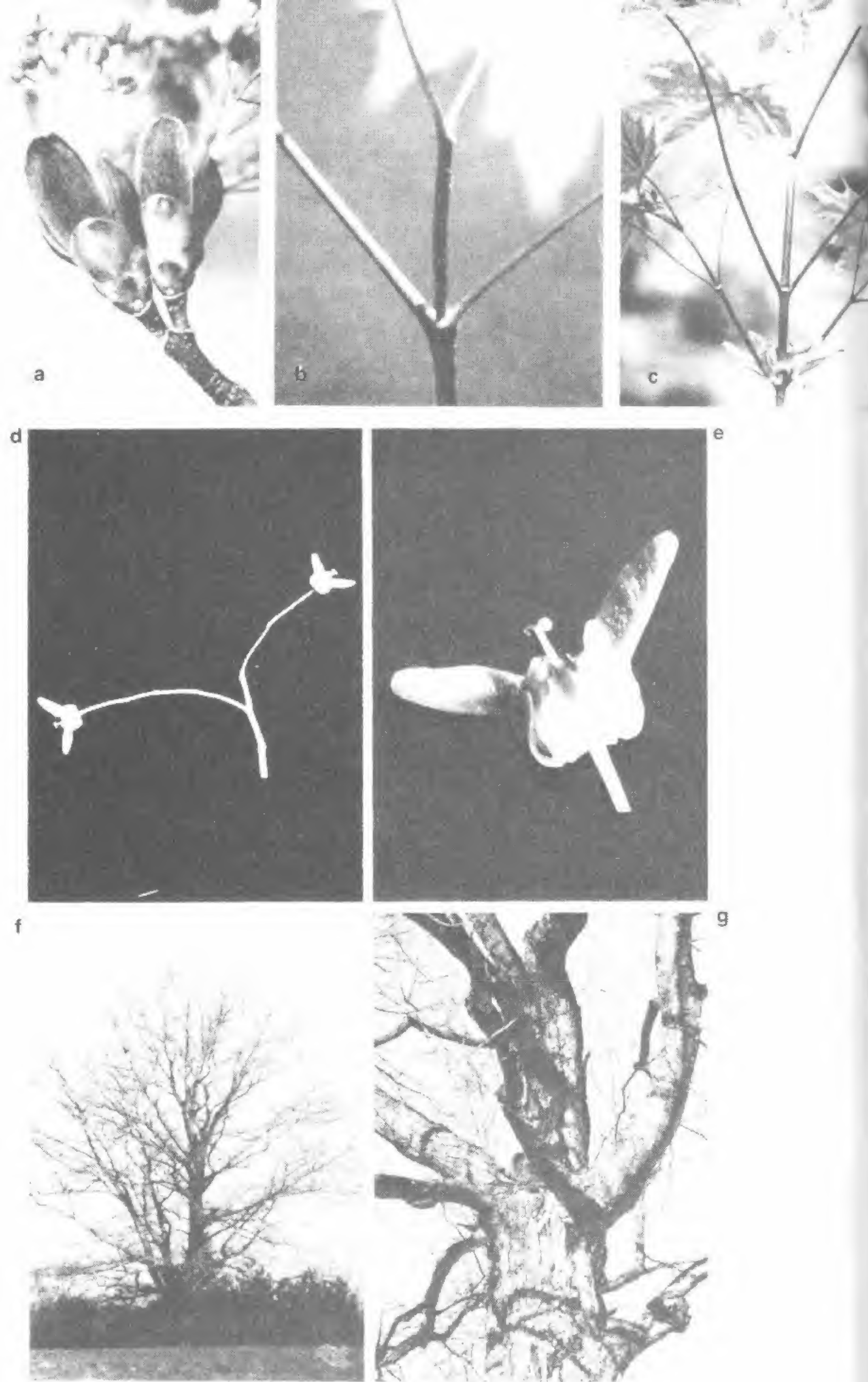


Fig. 125

o por debajo. La figura 125d muestra una pareja típica de pistilos y la e es un primer plano de dichos pistilos, formados por dos semillas aladas por encima de las cuales se aprecia un estigma dividido. Como ocurre en el caso de la lila, las diferentes partes del arce surgen por pares que crecen formando ángulos rectos entre sí.

Las figuras 125f y g muestran el tronco y las ramas de arces maduros, mas ¿dónde aparece aquí la ordenación decusada? ¿Dónde se halla la lógica estructural? Sin duda, el árbol de la figura 125f tiene un orden global, pero éste, más que constituir pares repetitivos regulares, se asemeja a una figura de Lichtenberg. ¿Cómo ha podido el modelo decusado volverse aleatorio?

Por increíble que parezca, cada rama del árbol ha crecido a partir de una bifurcación entre el tallo y un peciolo, y cada hoja se oponía a otra o bien a una yema que podía originar hojas. En el momento de su formación, todas las yemas muestran hojas rudimentarias en ordenación decusada. La aleatoriedad surge debido a que algunas yemas no reciben luz, o se rompen y no producen tallos, o bien, en caso de que lleguen a desarrollarse, dichos tallos y ramas giran o se desvían en respuesta a múltiples factores, como la luz del sol, la sombra, el viento y la nieve. Por consiguiente, la causa de que el arce maduro presente una estructura global aleatoria es que algunas partes no se desarrollan por completo o lo hacen de una forma defectuosa o según determinadas desviaciones.

Las ramas de la forsitia de la figura 126 proporcionan un claro ejemplo de la forma en que la luz del sol modifica el modelo de ramificación decusada determinado genéticamente. En la figura 126a vemos varios pares de brotes irguiéndose en el tallo y cómo cada uno de ellos se cruza en ángulo recto en relación con los pares adyacentes. La figura 126b muestra una rama bifurcada del mismo arbusto, pero que en vez de crecer verticalmente lo hace en sentido horizontal. En esta rama, sólo las yemas que se encuentran en la parte superior quedan expuestas a la luz solar y desarrollan nuevos brotes. Si llegan a desarrollarse yemas en la parte inferior de la rama, se desviarán en su crecimiento hacia arriba, y por tanto todas las yemas y brotes aparecerán erguidos en la parte superior.

Reflexionando un poco acerca del modelo de ramificación decusada, advertimos la suerte que supone que dicho modelo pueda ser



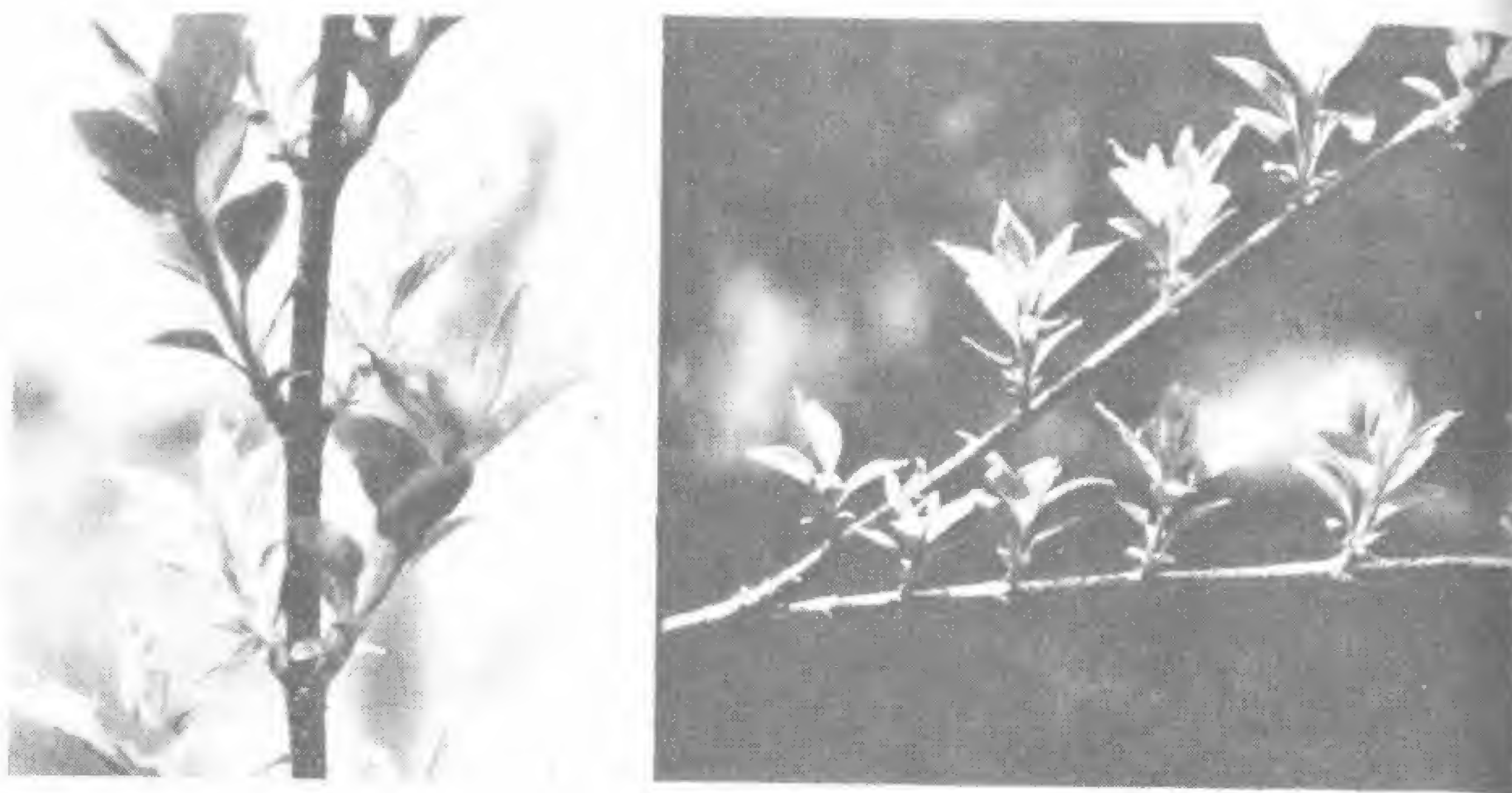


Fig. 126

a b

modificado, ya que si fuera rígido, sus partes entrarían inevitablemente en conflicto: las hojas y las ramas crecerían unas hacia otras. En la figura 125c podemos ver los comienzos de este conflicto: en los peciolo inferiores han surgido pares adicionales de hojas que llegarían a encontrarse y a obstaculizar a los peciolo de las hojas superiores si uno u otro de los pares implicados no se desviara de su trayectoria de crecimiento. Como modelo teórico, la decusación no es una buena configuración para la ramificación, ya que presenta una serie de conflictos inherentes y funciona sólo debido a que admite posteriores modificaciones de la estructura original. Por tanto, en la medida en que no consideró las modificaciones originadas por el entorno, Le Corbusier erró en su hipótesis: además de ser una función matemática pura, el árbol responde directamente a las influencias de su medio ambiente.

### Filotaxis espiral

Analizando diferentes tipos de filotaxis, o modos de ordenación de las hojas en una planta, vimos que el modelo de ramificación alterna, representado en la figura 118c, en el que las hojas crecen a

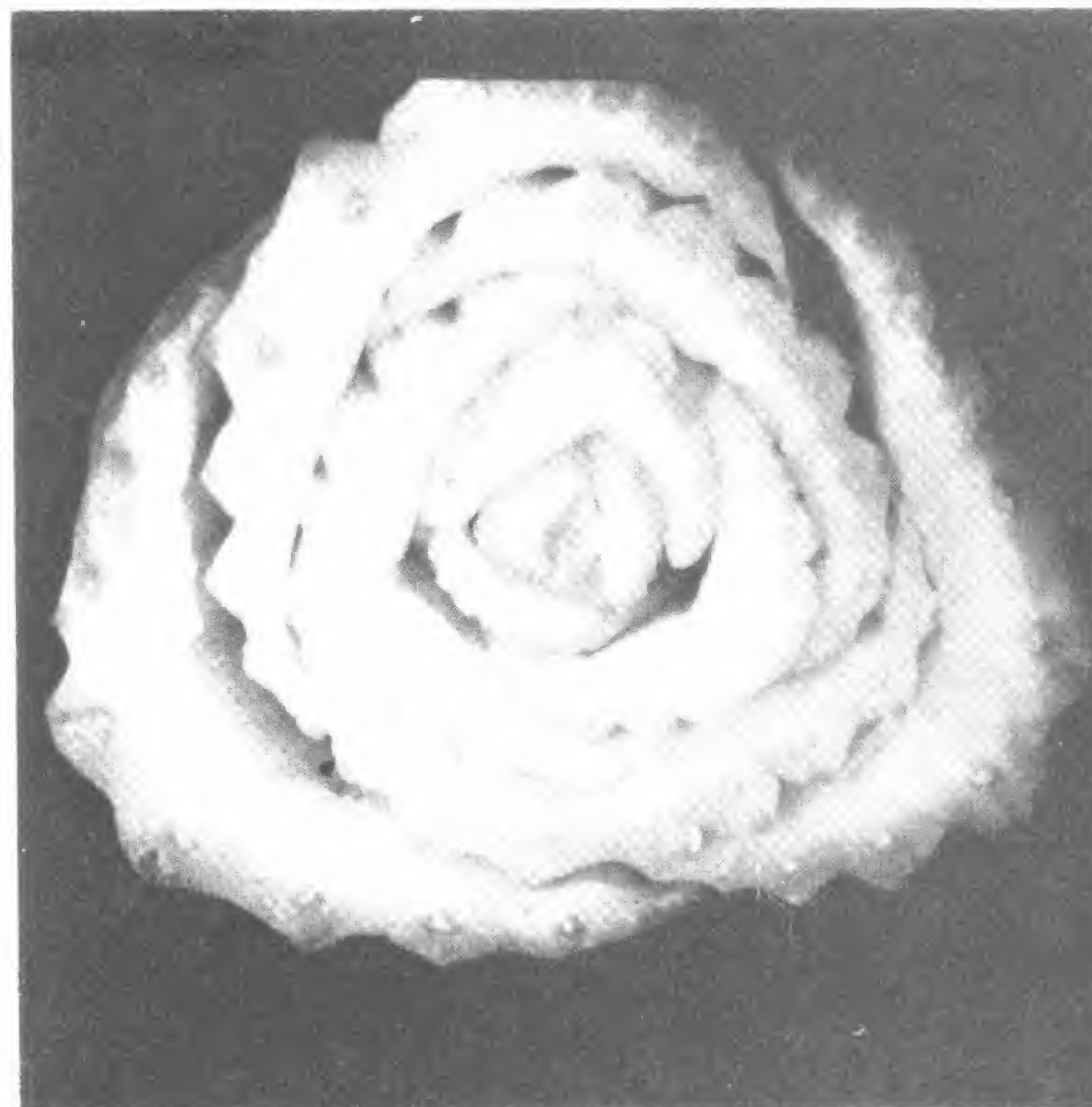


Fig. 127

ambos lados del tallo oponiéndose la una a la otra pero a diferentes alturas, puede haber evolucionado para dar lugar al modelo espiral o helicoidal, en el cual las hojas rodean el tallo. La evolución puede haberse producido también en la dirección opuesta, es decir, que el modelo helicoidal podría haber originado el diseño alterno. En cualquier caso, veamos ahora algo sobre el meristemo en el modelo helicoidal, que presenta gran interés por crecer según los términos de las series de Fibonacci.

La figura 127 muestra la sección transversal de un manojito de apio justo por encima de su meristemo (el montículo cónico de teji-



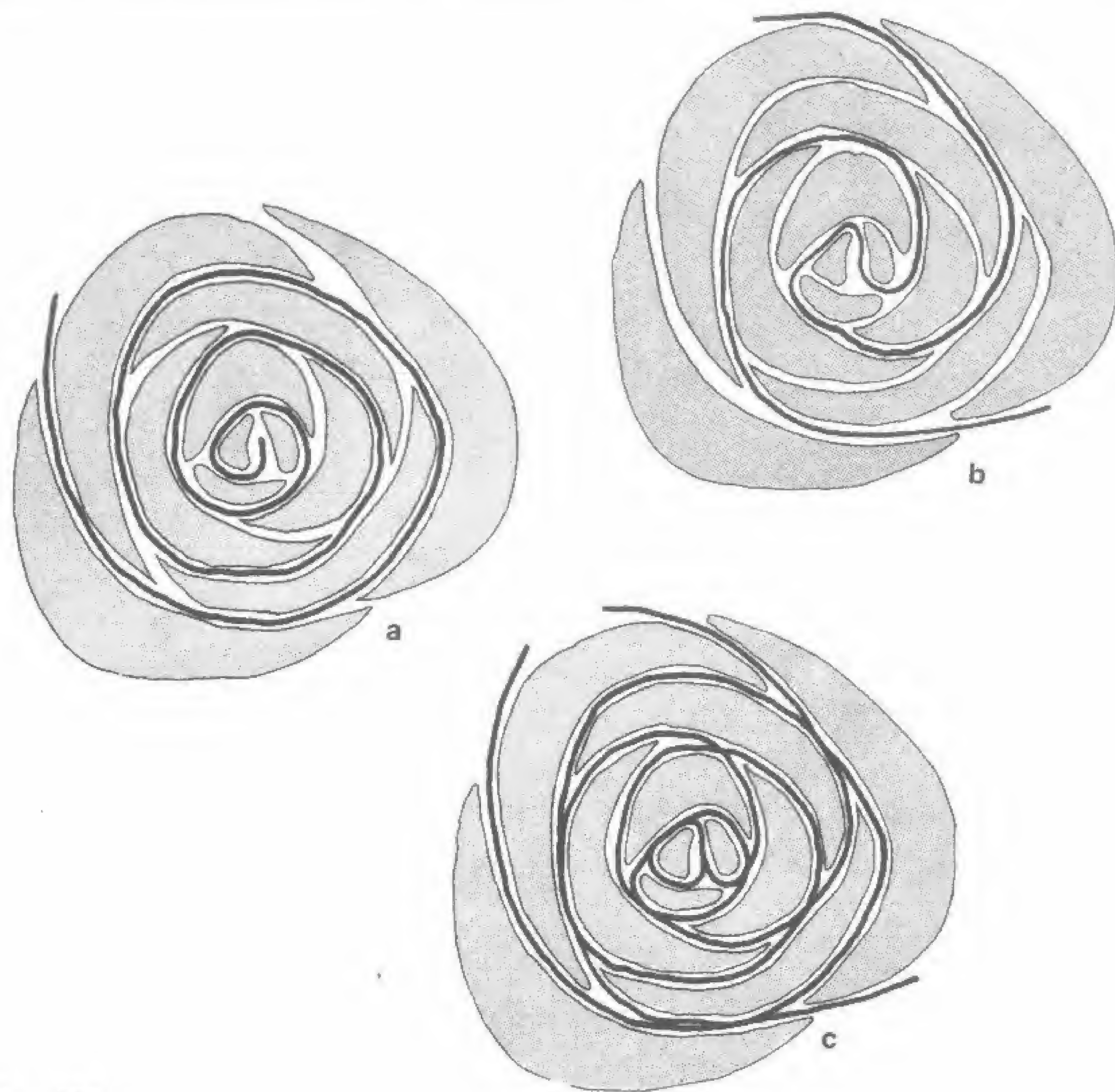


Fig. 128

do macizo situado en la base de la planta), y en el que podemos apreciar cómo los distintos tronchos se agrupan y se solapan entre sí siguiendo un modelo en remolino. Según se analiza en la figura 128, una espiral que crece en sentido contrario al de las agujas del reloj (a) se superpone a una espiral doble (b) para perfilar los diferentes tronchos del apio (las dos figuras superpuestas se ven en c). Las espirales discurren por entre los tronchos, pero también podrían hacerlo a través de los centros de aquéllos. En cualquier caso, obtendríamos al final una espiral formada por otras dos superpuestas.

La figura 129 representa un diagrama del apio en el que se han marcado los tronchos de acuerdo al orden en que se desarrollan.

La ilustración b muestra cómo se unen en el meristemo los tronchos, por medio de uniones ovales, al igual que los peciolo del filodendro que aparece en la figura 50. En ambos ejemplos, tanto unos como otros se desarrollan hacia arriba del tallo en espiral, si bien en el apio el tallo es un cono achatado y no un cilindro.

El modelo helicoidal surge como consecuencia del desarrollo de las hojas, que brotan de una en una (en contraste con los modelos opuesto y decusado, en los que el desarrollo se produce de dos en dos) y cada hoja crece allí donde el espacio disponible entre ellas es mayor. Examinando la disposición de los tronchos de apio, vemos que el número 3 se sitúa en el espacio existente entre el 1 y

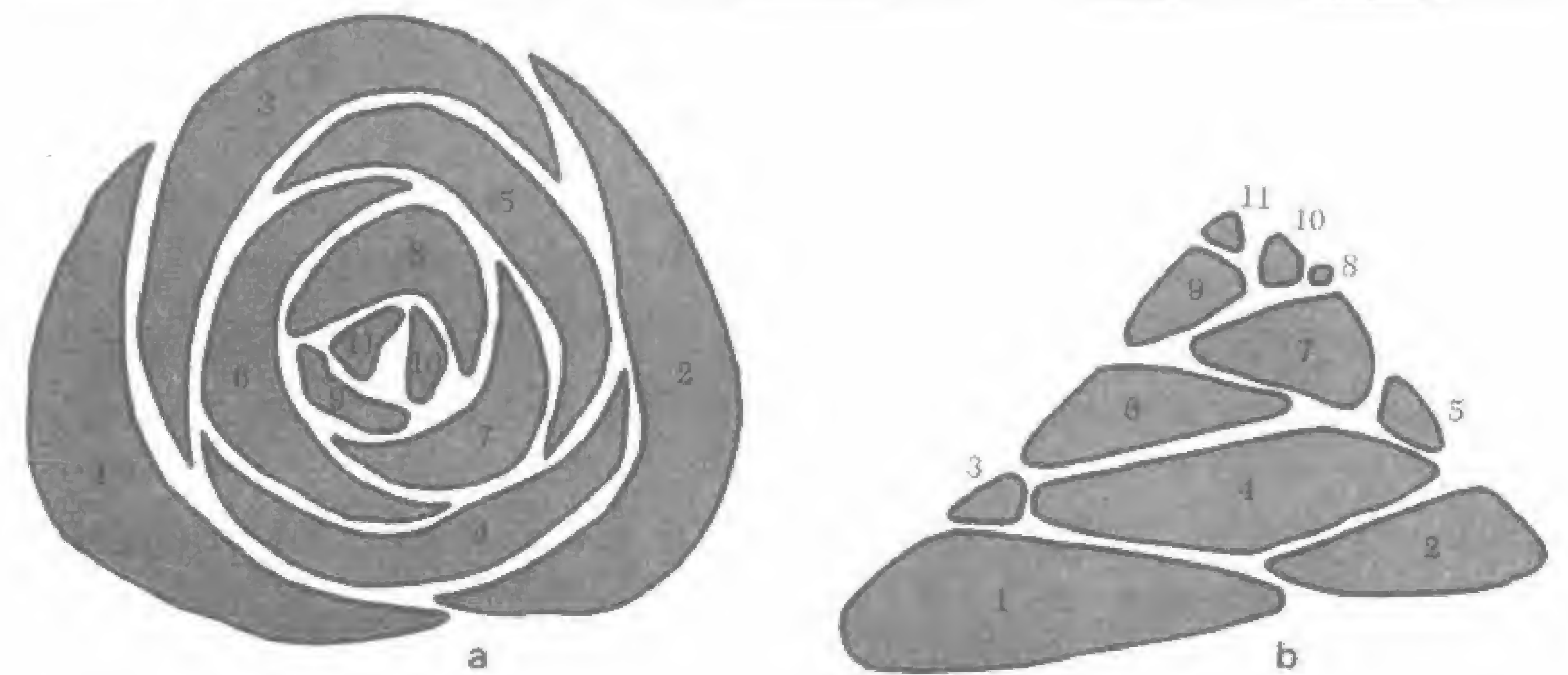


Fig. 129

el 2; el número 5 lo hace entre el 2 y el 3; el 8, entre el 5 y el 6, etc., de manera que cada nuevo troncho crece allí donde tiene mayor espacio.

Una observación menos obvia, pero confirmada una vez más por la fotografía y la figura, es que el nuevo troncho, situado junto a un par dado, monta sobre el elemento más viejo de dicho par de forma que, en el diagrama, vemos que su centro se halla más cerca del centro del troncho más antiguo que del más joven. En la parte superior de la figura 129, por ejemplo, el troncho 3 está más próximo al número 1 que al 2, o el 6 dista menos del 4 que del 3, y así sucesivamente. Esta disposición ocurre automáticamente; el ele-



mento más viejo de un par dado se sitúa con respecto al tallo en una posición más baja que el troncho más reciente, que cabalga sobre él.

Ahora bien, según sea el tamaño de las bases de la hoja y la rapidez con que el mismo disminuya a medida que éstas trepan por el cono del meristemo, pueden producirse diferentes variaciones de la forma helicoidal. Vemos que si las hojas experimentan una rápida disminución de tamaño, el troncho 4 comienza en una posición más baja en el espacio existente entre los tronchos 1 y 2, y sobra espacio a los lados de los tronchos 3 y 5 para que quepan en ellos el 6 y el 7. En este caso, las espiras se comprimen de manera que los tronchos de una de ellas se alargan por los espacios dejados por los de la espira precedente hasta ponerse en contacto con los de la espira que le sigue. Si las bases de la hoja disminuyen a una velocidad aún mayor, las espiras experimentan una nueva compresión y las bases de la hoja de una espira tocan los tronchos de dos, tres o cuatro espiras. En realidad, estos modelos comprimidos del crecimiento helicoidal constituyen sólo variaciones del modelo básico de la figura 129. En cualquiera de las formas cuya compresión es mayor, el troncho 6, por ejemplo, se inserta entre el 3 y el 4, como ocurre en nuestro diagrama, pero el 3 y el 4 son lo suficientemente pequeños para permitir que el 6 se deslice entre ellos y haga contacto con el número 1. Tanto si los tronchos de una espira penetran o no por entre los de otra, siempre crecen en los espacios que dejan otros, de manera que, excepto en el caso de los desplazamientos producidos por la compresión de las espiras, mantienen sus posiciones relativas.

Hemos descubierto así dos hechos importantes acerca de la filotaxis espiral: (1) cuando las bases de la hoja se desarrollan en sucesión alrededor del ápice del tallo, se insertan entre las otras de forma que se alinean según un modelo helicoidal, en el que cada nuevo troncho monta por encima del elemento más viejo de un determinado par de la espira precedente; (2) pueden desarrollarse variaciones de este modelo, en las cuales los tronchos de una espira interpenetran y hacen contacto con los de otras anteriores. Veamos cómo se realiza esto en ejemplos tomados de la Naturaleza.

La figura 130 muestra el sistema helicoidal de espinas que desa-

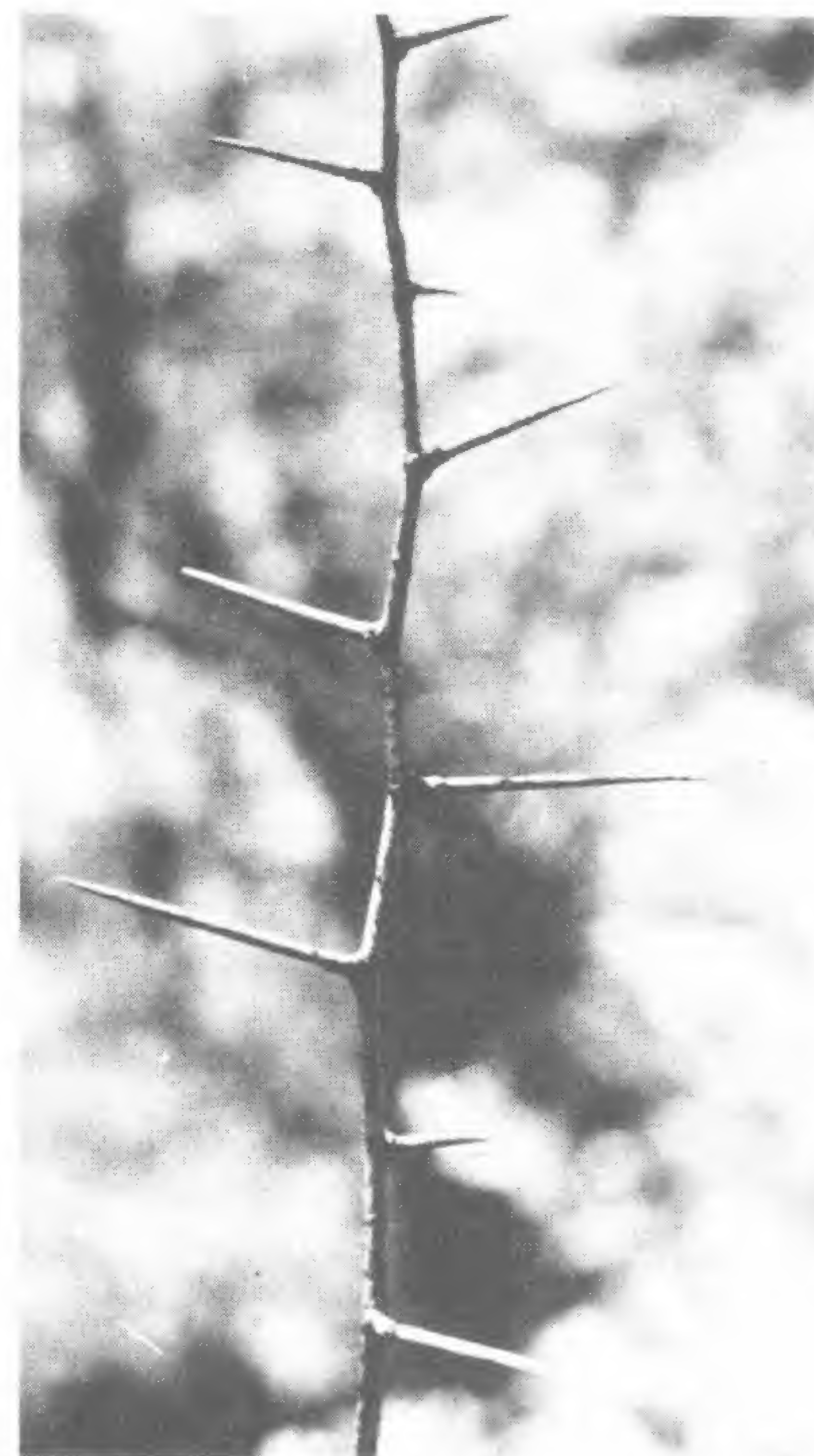


Fig. 130



rolla un joven arbusto. Si recorremos la espiral hacia arriba, dando dos vueltas alrededor del tallo, contamos en nuestro recorrido cinco espinas y finalizamos en una espina situada casi directamente encima de aquella por la que habíamos comenzado. Esta filotaxis especial se representa generalmente por la fracción  $2/5$ , en la que el numerador es el número de vueltas alrededor del tallo, y el denominador el número de hojas, ramas o espinas que se encuentran a lo largo del recorrido. El manzano, el roble y el albaricoquero presentan el mismo modelo  $2/5$  de filotaxis; los juncos, el haya y el avellano tienen filotaxis de  $1/3$ ; el llantén, el álamo y el peral, filotaxis de  $3/8$ , y los puerros, sauce y almendro exhiben filotaxis de  $5/13$ . Los numeradores y denominadores de estas fracciones son términos de las series de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13... Aunque el examen de los meristemas revela que las hojas o ramas señaladas no se alinean exactamente entre sí, se encuentran lo bastante próximas a las fracciones de Fibonacci como para demostrar su utilidad en la descripción de modelos de crecimiento en los vegetales.

Los números de las series de Fibonacci se observan de una forma incluso más acusada y precisa en las espirales compuestas de la figura 131. En estos ejemplos, el numerador y denominador de la fracción dan el número de espirales que giran tanto según las agujas del reloj como en sentido contrario y que están implicadas en cada caso. De acuerdo con esto, el apio de la figura 127 presenta una filotaxis de  $1/2$ , y tanto la piña tropical de la figura 131a como la del pino de la figura 131b tienen 8 filas de escamas dispuestas en espiral en un sentido y 13 en el otro, con una filotaxis de  $8/13$ . Otras especies de pinos tienen filotaxis de  $2/3$ ,  $3/5$  o  $5/8$ . La margarita de la figura 131c muestra una filotaxis de  $21/34$ , idéntica a la del girasol de d, aunque fracciones de  $55/89$  y de  $89/144$  son también corrientes en los girasoles, y Daniel T. O'Connell hace mención del crecimiento de un ejemplar ya viejo de esta última especie con una filotaxis de  $144/233$ .

La causa de que todas estas fracciones representen los términos sucesivos de series de Fibonacci es que todas ellas son variaciones del mismo modelo helicoidal del crecimiento: del patrón que veíamos en el apio.

Con el fin de demostrar esto último, consideremos un diagrama

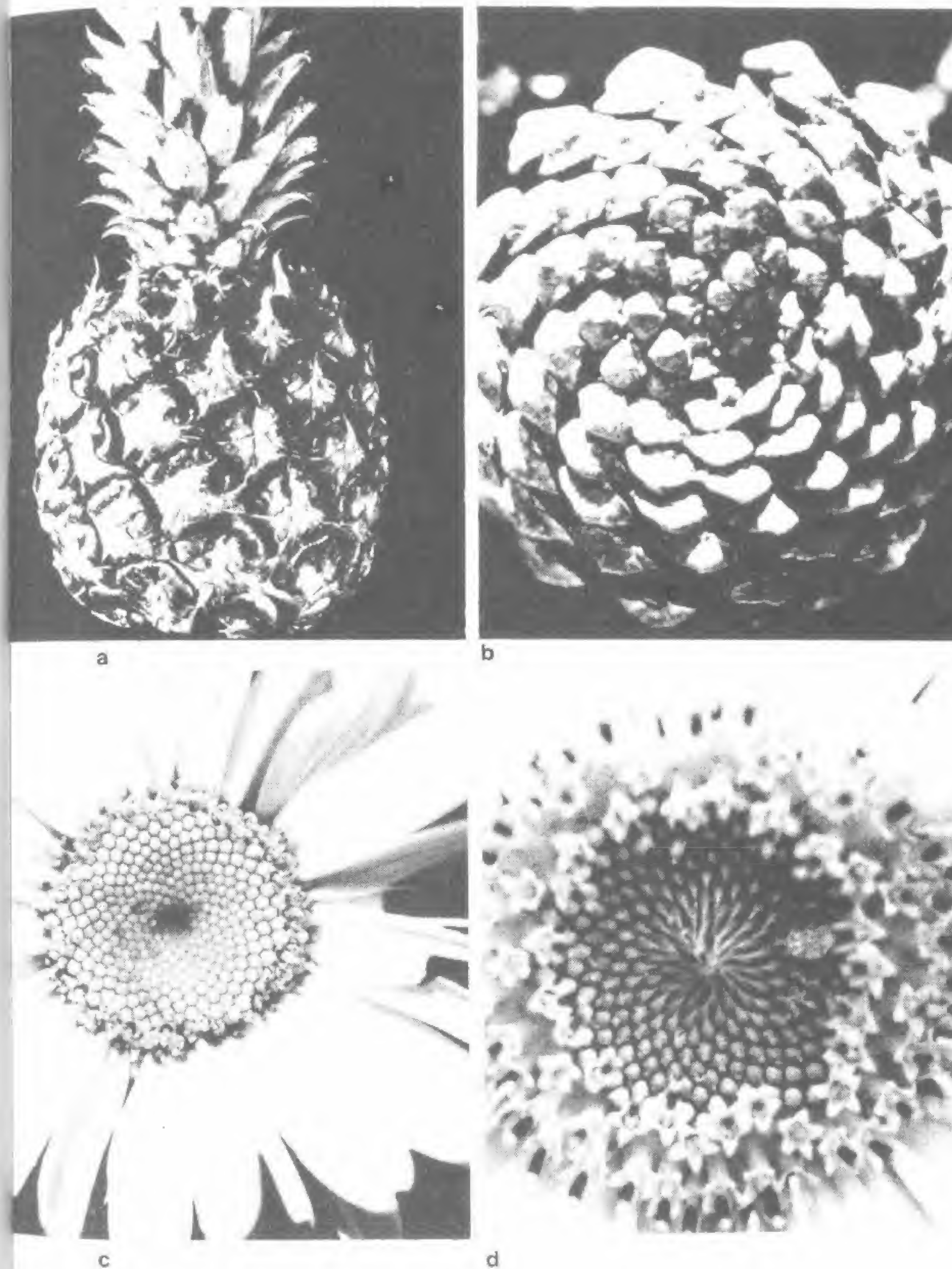


Fig. 131



en el que se presenta la distribución de los tronchos de apio. En él se mostrarán también la distribución de las escamas de las piñas y las de los elementos de las flores de las margaritas y de los girasoles. Es decir, un único diagrama describirá todas las fracciones de Fibonacci.

Este diagrama puede verse en la figura 132a y consiste en un conjunto de puntos dispuestos en sucesión a lo largo de la espiral que aparece en *b*. En *a*, sin embargo, se ha omitido la espiral generada. Los puntos guardan entre sí una relación especial, como puede comprobarse dibujando una línea que conecte un punto cualquiera con el centro y observando cuál es su posición relativa con respecto al par de puntos situados inmediatamente detrás. Suponiendo que los puntos crecen desde la periferia de la espiral hacia el centro, hallaremos en cada caso que si tratamos una recta que una un punto dado con el que le precede y otra entre ese mismo punto y el inmediatamente anterior al precedente, esta última presenta una distancia menor, es decir, que el punto se encuentra situado más cerca del más antiguo de los dos que le anteceden. Esta relación es similar a la que ya habíamos visto en el caso del apio, y según la cual la recta que unía el centro de dos tronchos formaba un ángulo menor con el centro del troncho más viejo y mayor con el del más reciente.

Los puntos de la figura 132a se disponen a lo largo de la espiral que aparece en *b*, de forma que el arco comprendido entre dos puntos consecutivos es de  $137,5^\circ$ , o, para ser más exactos, de  $137^\circ 30' 28''$ . ¿Por qué este ángulo precisamente? ¿Está relacionado de alguna manera con los tejidos vegetales? No, el ángulo sólo señala los puntos en la relación exacta que éstos mantienen entre sí, de forma que cada uno de ellos presenta un ángulo pequeño con respecto al punto más antiguo de la espira anterior y un ángulo grande con el más reciente. Esta relación surge de un modo completamente natural en el meristemo de la planta como resultado directo de la adaptación de cada elemento a los espacios que dejan los otros. Ahora bien, para trazar esta relación en un diagrama bidimensional hemos de utilizar las matemáticas, y sucede que el ángulo de casi  $137,5^\circ$  es  $360^\circ$  veces  $(3-\sqrt{5})/2$  y que en términos de sección áurea,  $\phi$  ó  $0,618\dots$ , es  $360^\circ$  veces  $\phi^2$ . En términos de las

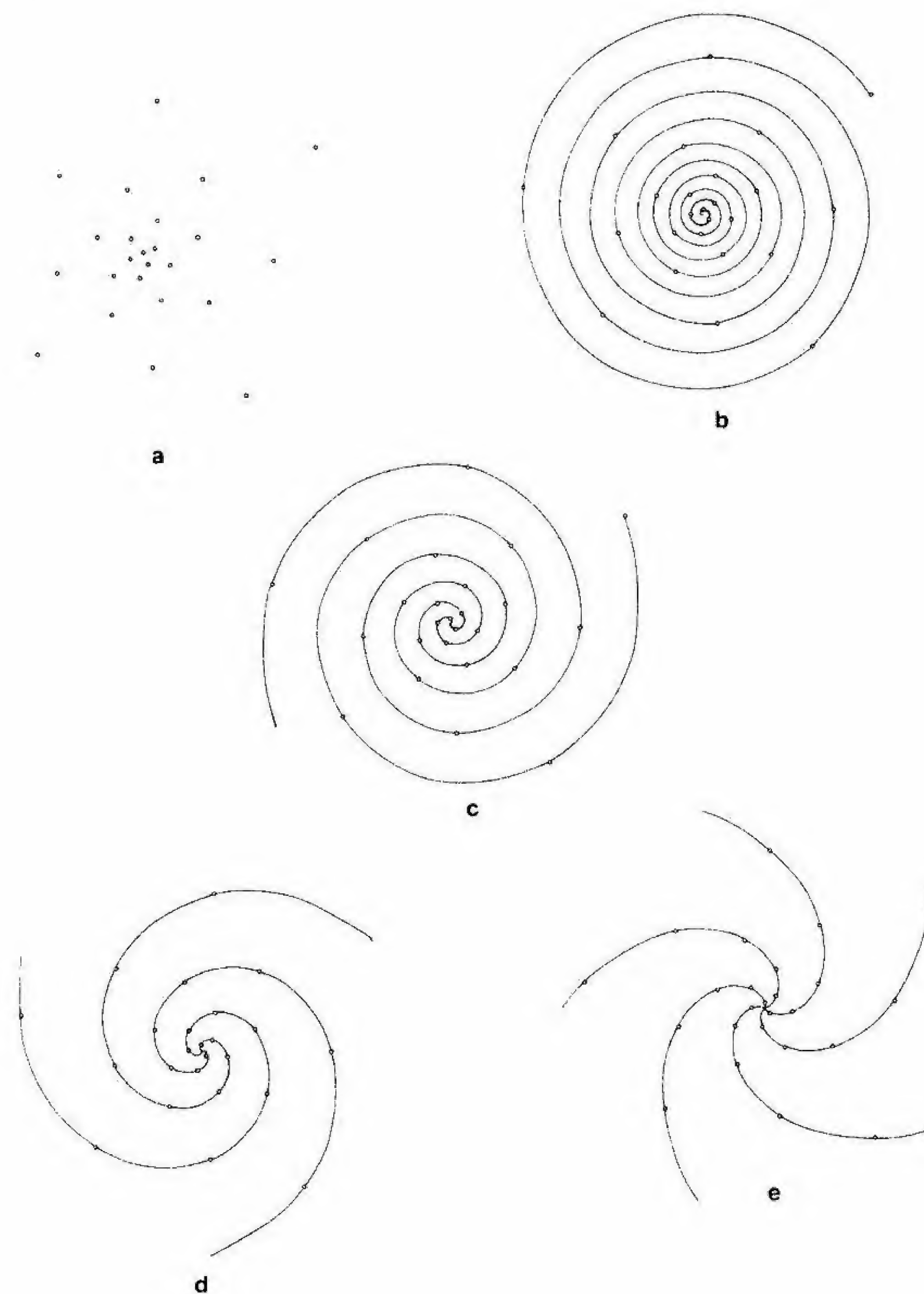


Fig. 132



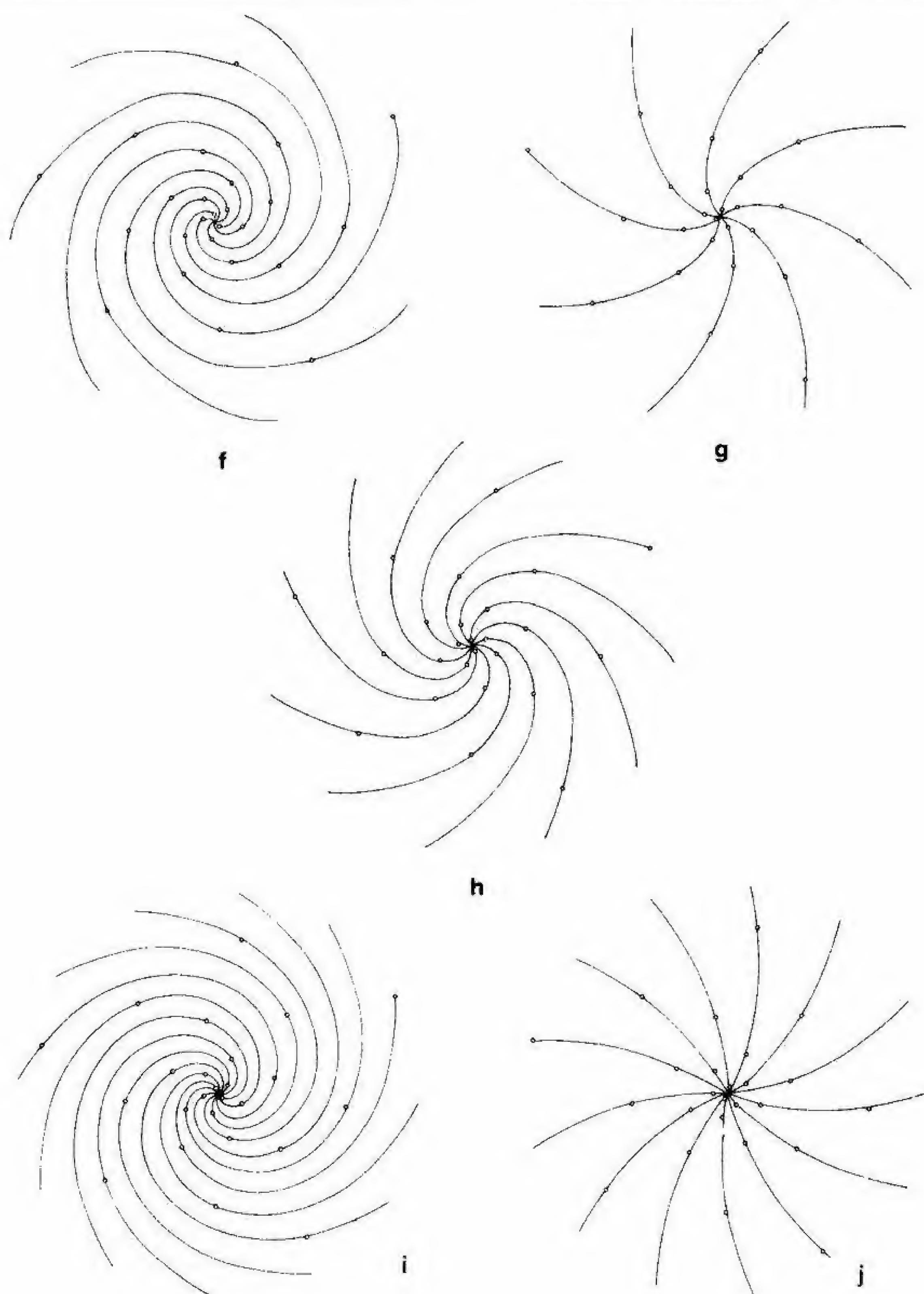


Fig. 132 (continuación)

series de Fibonacci se aproxima  $360^\circ$  veces a un término de la serie dividido por el término situado inmediatamente detrás del que le sigue. Así, el ángulo tiene un significado definido en términos de la sección áurea y de las series de Fibonacci, planteamientos todos ellos que no preocupan, por supuesto, a las plantas. Éstas no utilizan las matemáticas y sus elementos simplemente crecen allí donde encuentran espacio para hacerlo. Nosotros, para describir el modelo tridimensional de crecimiento mediante un diagrama bidimensional, debemos introducir los planteamientos matemáticos.

Una vez trazados los puntos, las figuras 132c - j muestran lo que podemos hacer con ellos: pueden construirse grupos de 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12 y 13 espirales utilizando dichos puntos. Resulta interesante observar que no es posible formar grupos regulares de 4, 6, 9 y 10 espirales: éstos no encajan en los modelos.

La figura 133 nos muestra el modo en que podemos superponer las espirales formadas con anterioridad. La espiral simple se solapa con la doble en a, de forma similar a como lo hacía en el apio de la figura 128; el grupo de 2 espirales se solapa con el de 3 en b; el de 3 lo hace con el de 5 espirales en c; el de 5 con el de 8 en d, y el de 8 con el de 13 en e. De esta manera, con un mismo conjunto de puntos hemos construido espirales compuestas con fracciones de Fibonacci de  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $3/5$ ,  $5/8$  y  $8/13$ . También podríamos construir otras fracciones, ya que es posible trazar 21 espirales que se solapen con un grupo de 13, 34 con 21, etc.

Además, lo que resulta muy sorprendente, si los dos grupos de espirales que superponemos giran en direcciones opuestas, y si se cortan sólo en los puntos señalados en nuestras figuras, obtenemos únicamente fracciones de Fibonacci. Dado que no es posible construir ciertos grupos de espirales con los puntos dados, y como algunos de los que se forman no pueden superponerse a otros debido a que o bien giran de forma inadecuada o bien se solapan con los otros para dar lugar a puntos adicionales, resulta que nuestros puntos no sólo generan *todos* fracciones de Fibonacci, sino *sola y exclusivamente* dichas fracciones.

Al igual que el modelo de las espirales compuestas con una filotaxis de  $1/2$  de la figura 133a se parece en gran medida al del apio, podríamos modificar el modelo de espirales con una filotaxis de



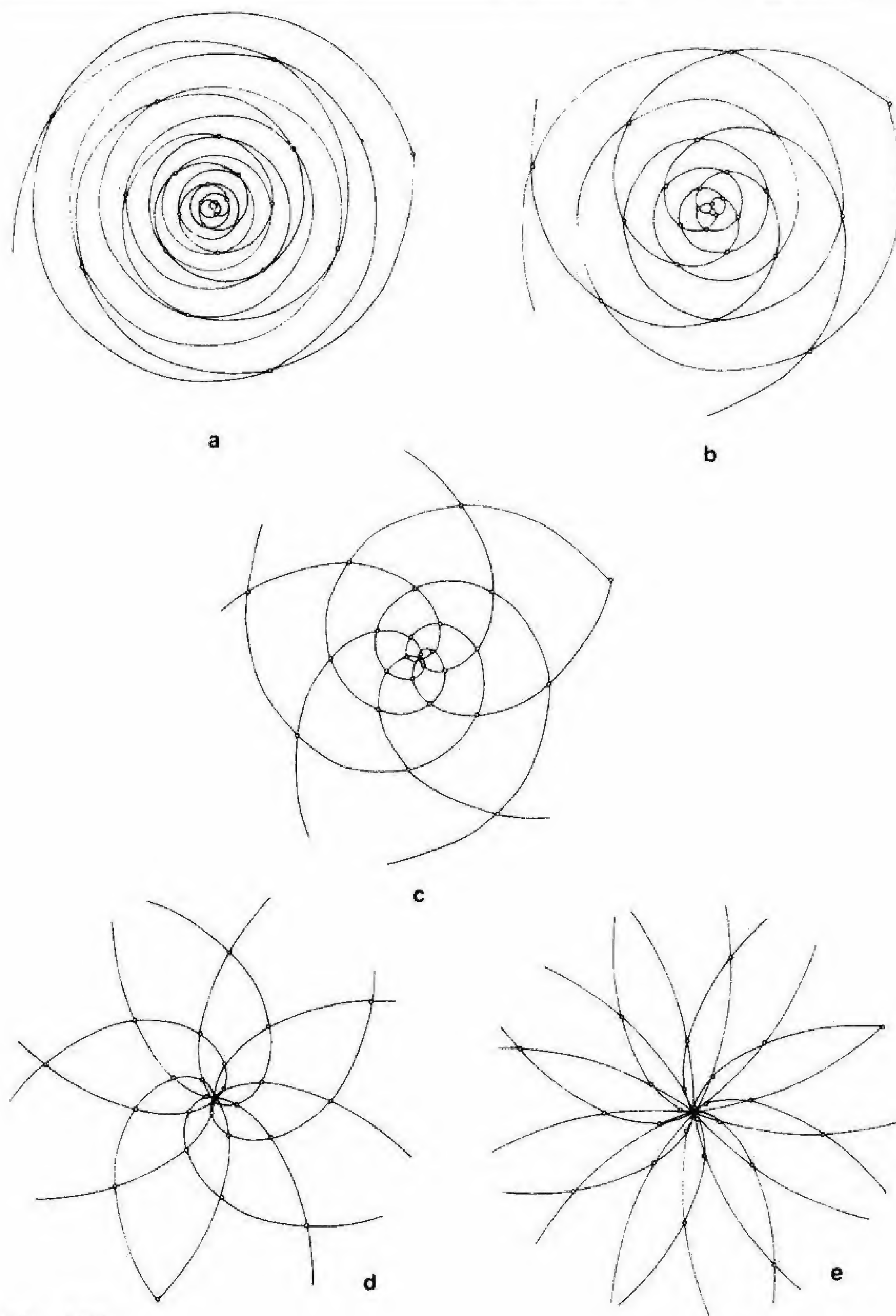


Fig. 133

8/13 representado en la figura 133e de forma que se asemejara al de la piña de la figura 131b simplemente comprimiendo las espiras, es decir, trazando los puntos originales de nuestra serie en una espiral más cerrada y compacta que la de la figura 132b.

Lo más notable de todo esto, en suma, es que los puntos de la figura 132a (o alguna variación ligeramente más comprimida), que son generados mediante el uso del «ángulo de Fibonacci» de  $137.5^\circ$ , señalan la intersección de espirales que encontramos en muchas plantas en crecimiento. Aunque este ángulo es importante a la hora de formar series bidimensionales de puntos, y pese a que las relaciones de dicho ángulo con los términos de las series de Fibonacci dan lugar a 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc., grupos de espirales, la planta no hace uso de estos planteamientos matemáticos y se limita a facilitar el crecimiento de sus elementos, ya se trate de las escamas de una piña o de los tronchos que forman una hortaliza, en sucesión alrededor del tallo de manera que cada uno de ellos se inserte en los espacios dejados por los demás. La planta no siente una predilección especial por las series de Fibonacci, ni busca la belleza mediante el uso de la sección áurea. Tampoco cuenta sus diversos elementos, simplemente hace brotar éstos donde hay espacio para ello. Toda la belleza que se deriva de esta disposición y el conjunto de relaciones matemáticas implicadas en el proceso son los subproductos naturales de un sencillo sistema de crecimiento en su interacción con el entorno espacial.



## 7. BURBUJAS Y POMPAS DE JABÓN

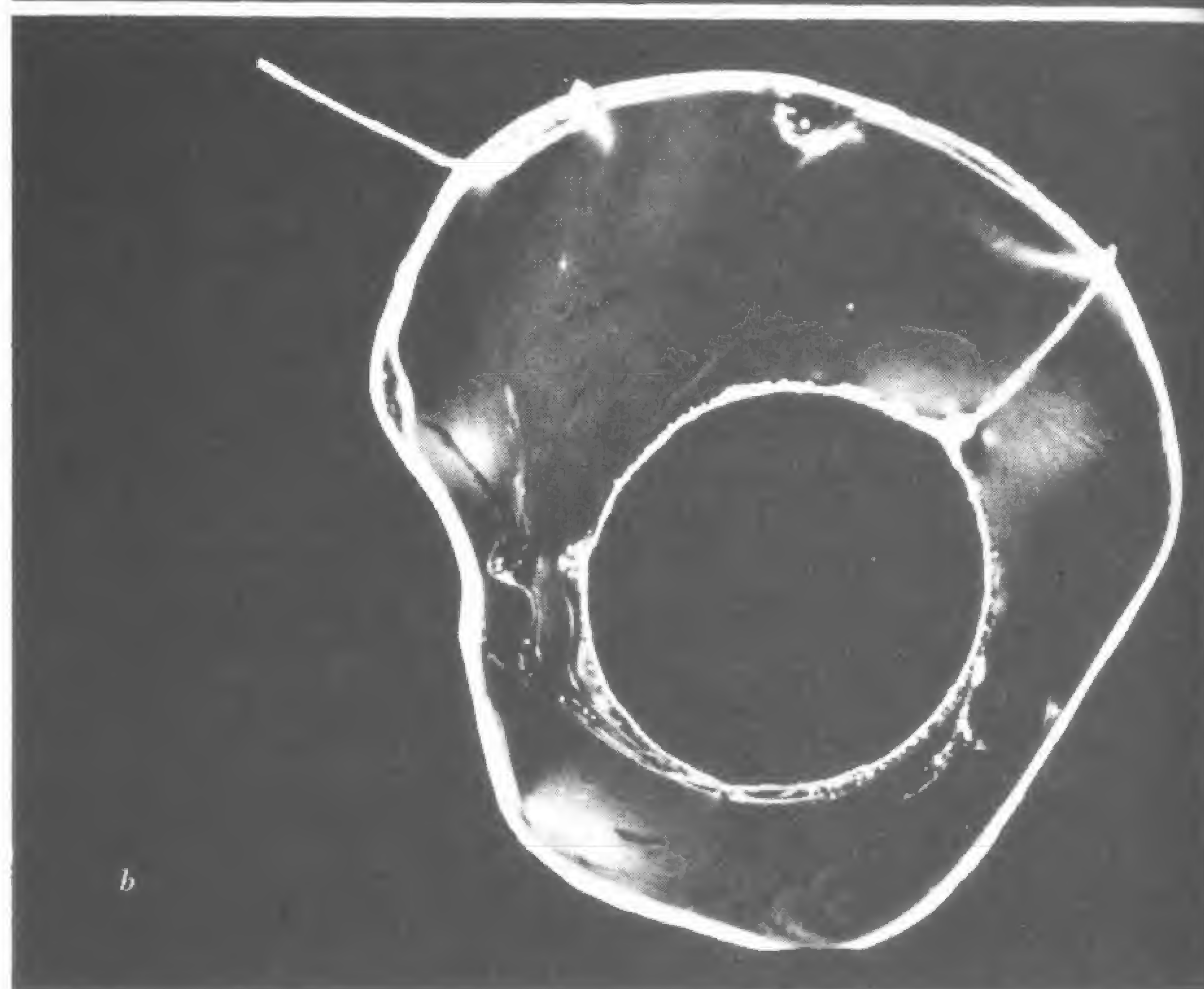
Las películas de jabón se ordenan según la configuración de mínima longitud que aparece en la figura 26, configuración caracterizada por poseer uniones triples, como ya vimos en su momento, y un ángulo de  $120^\circ$  entre los diferentes elementos que la forman. Al igual que otros modelos que hemos estudiado, la configuración mínima existe en una gran variedad de sistemas distintos, pero es aquí, en las películas que forma el jabón con el agua, donde manifiesta su forma más pura.

### **Películas de jabón**

El hecho de que las películas de jabón forman superficies mínimas se comprueba mediante el sencillo experimento que se ilustra en la figura 134, en el cual un pequeño bucle de hilo se mantiene extendido sobre una película de jabón en el interior de un anillo metálico. Si se pincha en el centro del bucle, la película que lo rodea hace que éste se abra hasta formar un círculo perfecto. La abertura del bucle de hilo se agranda todo lo que le resulta posible y adopta por tanto una forma circular, debido a que la película que lo rodea se reduce al máximo.

Sin necesidad de romper la película, puede empujarse fácilmente el bucle abierto del hilo de un lado a otro dentro del anillo metálico. Estos movimientos no modifican la superficie de la película que rodea al bucle; mas no es posible deformar éste, pues cualquier de-





formación incrementa dicha superficie. Cuando se obliga al bucle a cerrarse, la película tira de él y lo abre nuevamente.

La película de jabón mantiene abierto el bucle de la misma manera que los bomberos mantienen extendida una red, esto es, tirando de ella hacia afuera en todas direcciones. ¿Por qué ejerce esta fuerza la película? ¿Por qué tiende a minimizar su área? La razón se halla en que las partículas de agua y de jabón que se encuentran en los extremos superior e inferior de una película son atraídas con mayor intensidad hacia las partículas que forman el interior de la película que hacia las partículas de aire que las rodean, y así tienden a disminuir las distancias que las separan a unas de otras y a mantener la cohesión del líquido. Por consiguiente, a un nivel molecular, la película, donde todo parece en calma y sumido en el reposo, constituye el escenario de una frenética actividad. Las partículas de la superficie están siendo atraídas continuamente hacia el interior y desplazando a otras allí existentes, que a su vez también serán atraídas de nuevo.

### Superficies de separación

Por medio de otra demostración vamos a ver ahora cómo la tendencia del agua y del jabón a formar superficies mínimas da lugar a configuraciones también mínimas con uniones triples regulares. La figura 135 muestra tres chinchetas colocadas en vertical en-

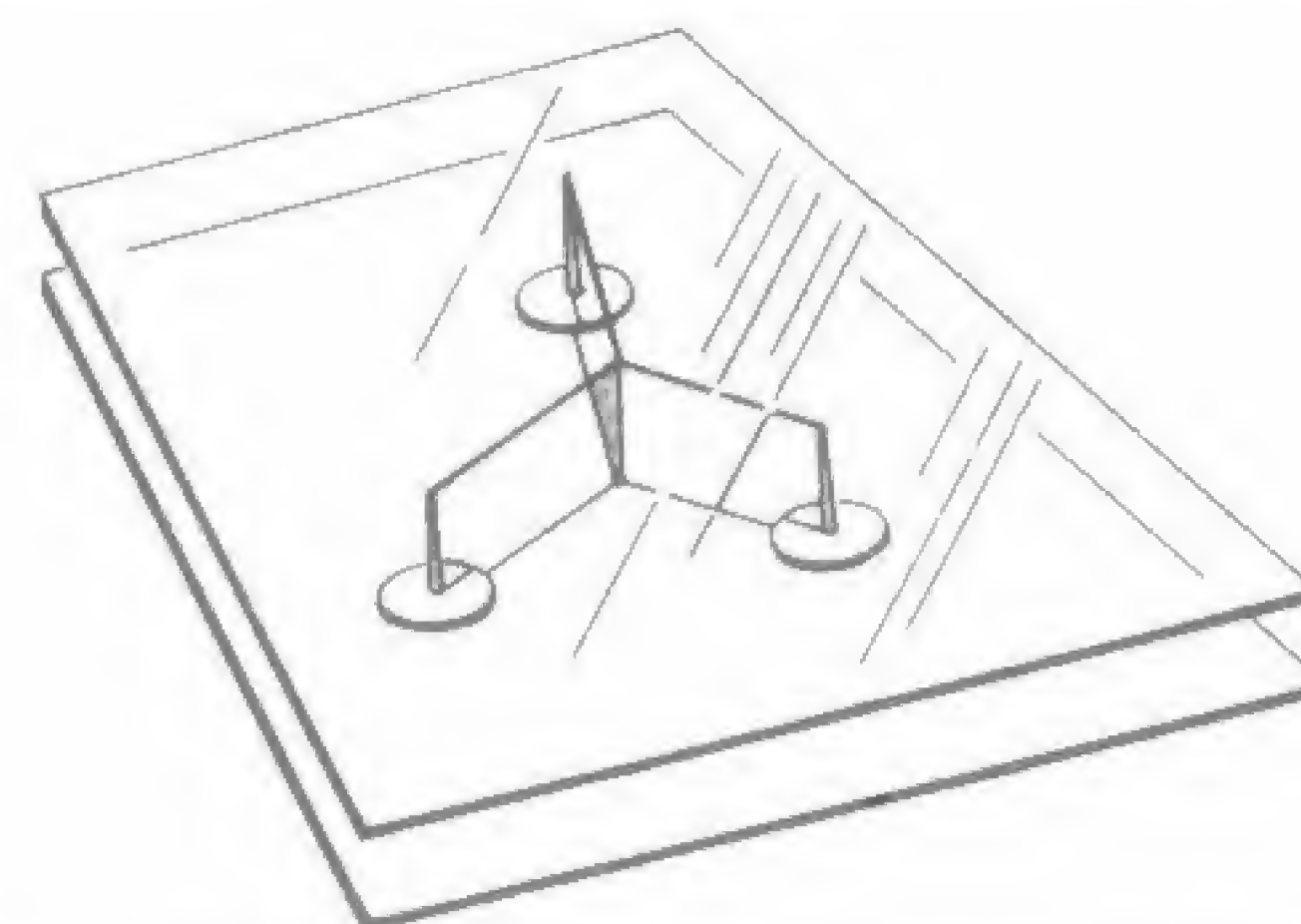


Fig. 135

◀ Fig. 134



tre dos láminas de vidrio. Cuando introducimos este «sandwich» en una solución jabonosa y lo extraemos a continuación, las películas de jabón se adhieren a las chinchetas y se unen entre sí para formar un vértice de tercer orden. El diagrama superior de la figura 136 muestra esta triple unión: los puntos representan las chinchetas y las líneas que se unen con ángulos de  $120^\circ$  son las secciones de las tres películas verticales.

Lo más interesante del caso es que cuando tres películas forman un ángulo de  $120^\circ$  utilizan menor cantidad de material que si se unieran de cualquier otra forma. Aplicando algo de geometría plana, podemos demostrar fácilmente que en el diagrama antes mencionado las películas tienen un 58 % de la longitud que presentarían si se dispusieran a lo largo del perímetro determinado por las tres chinchetas (en el centro de la figura 136), y el 87 % del material que poseerían si unieran las chinchetas con sólo dos películas, como se ve en el diagrama inferior de la misma figura. Por tanto, de los tres sistemas de compartimentalización mostrados en dicha figura, el de uniones triples con ángulos de  $120^\circ$  emplea el menor material posible. Ya en el siglo XIX, Jakob Steiner generalizó estos resultados y demostró que los sistemas de compartimentalización

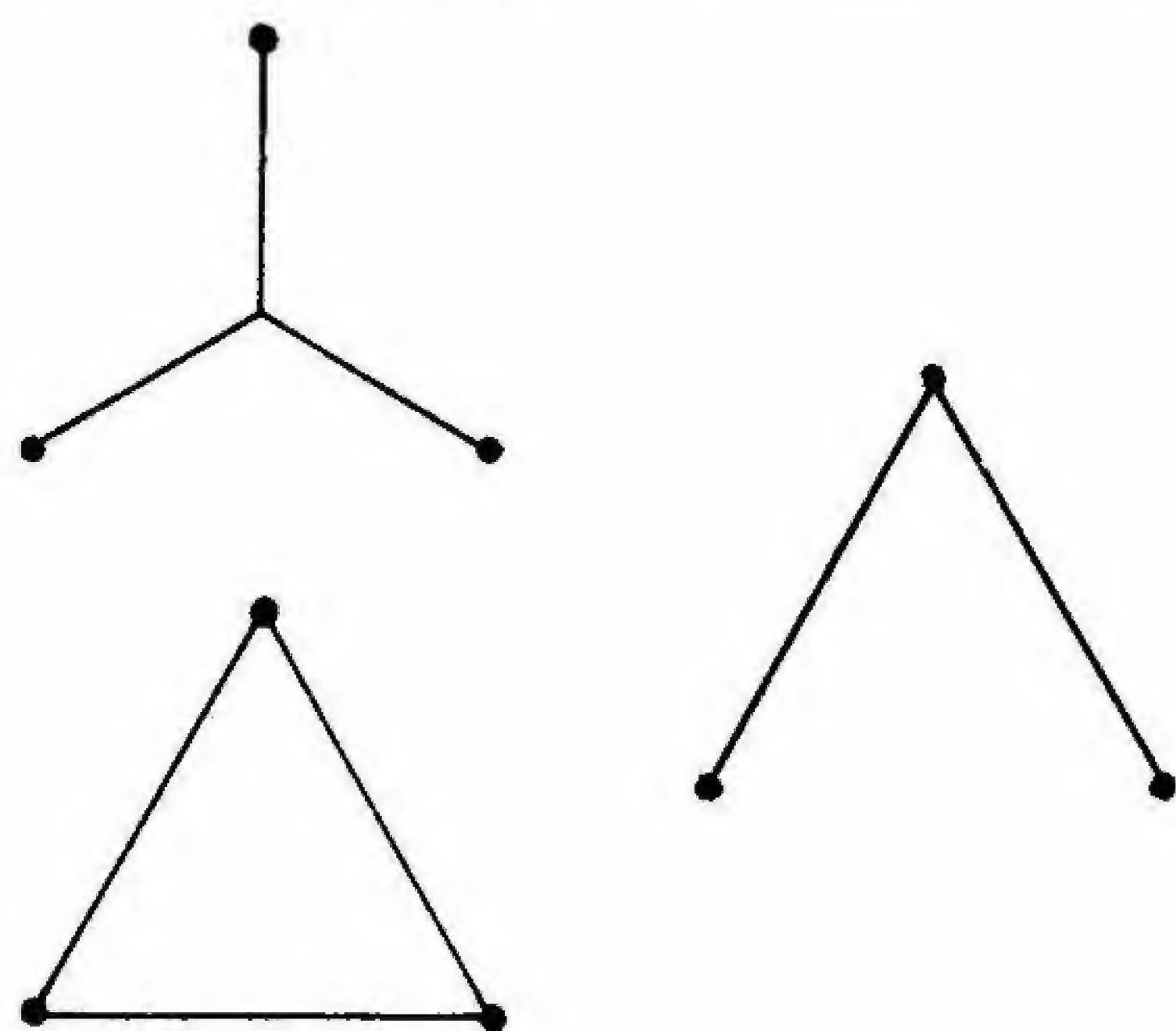


Fig. 136

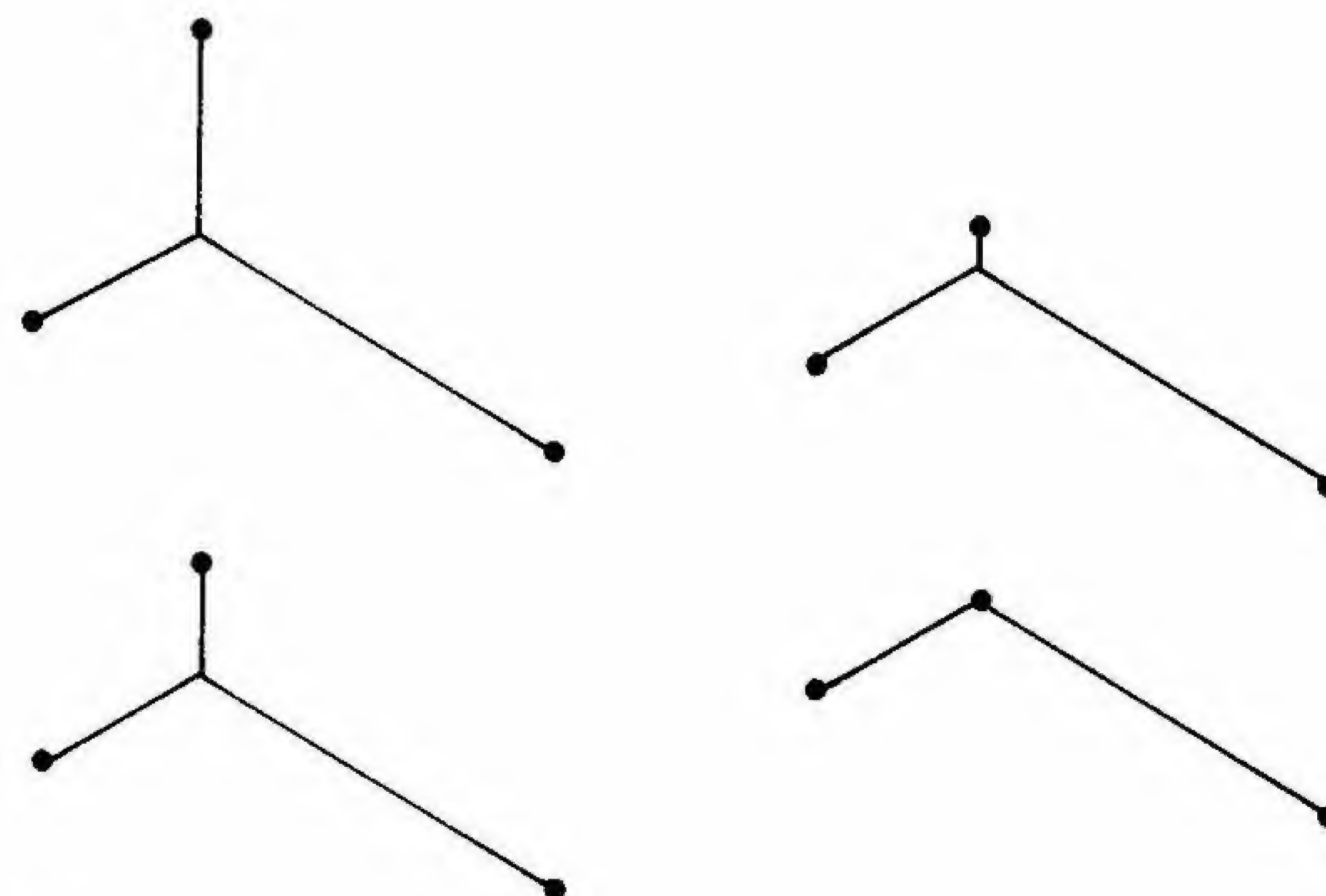


Fig. 137

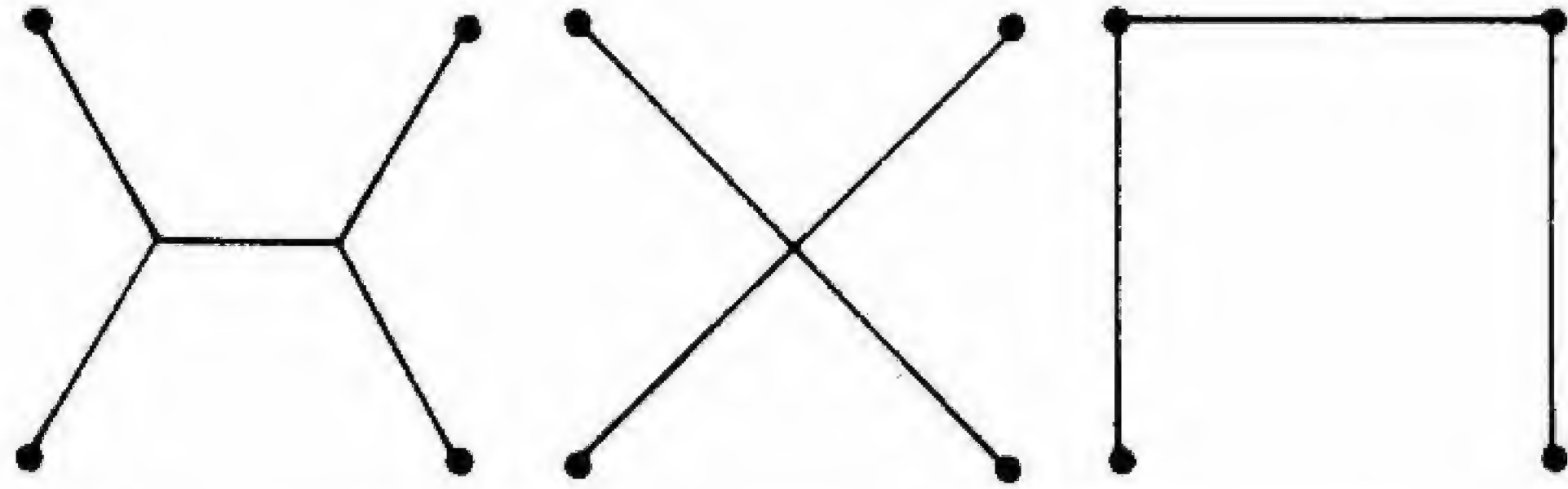
con vértices de tercer orden utilizaban menos cantidad de material que cualquier otro sistema.

Realicemos nuevos experimentos con las láminas de vidrio y las chinchetas. En la parte superior de la figura 136 las chinchetas se situaban en los vértices de un triángulo equilátero (y, por tanto, de ángulos iguales), mientras que en la figura 137 lo hacen en los vértices de triángulos de ángulos desiguales. Con respecto a la formación de una unión triple, observamos una regla general: la unión se va desplazando hacia la chincheta situada en el vértice que domina el ángulo mayor. Además, como un caso especial de la regla, vemos que cuando el triángulo determinado por las chinchetas tiene un vértice con un ángulo igual o superior a  $120^\circ$ , la unión triple degenera y se confunde con la chincheta que señala el vértice.

Ahora añadamos una cuarta chincheta a nuestro artefacto. Si las cuatro se sitúan en los vértices de un cuadrado, podríamos suponer que los tabiques de separación de las películas se unirán en el punto central formando una unión de cuarto orden o cuádruple, como se muestra en el centro de la figura 138. Este sistema de



Fig. 138



compartimentalización utiliza el 94 % de material que usaría para formar tres lados del cuadrado, como muestra el diagrama de la derecha. Sin embargo, si sacamos nuestro «sandwich» de la solución jabonosa, las películas adoptan un sistema aún más económico, que aparece representado a la izquierda de nuestra figura. Dicho sistema, con dos uniones triples, emplea el 91 % del material que se usaría para trazar los tres lados del cuadrado. Vemos por tanto que esta nueva disposición no es muy distinta de la que presenta una unión cuádruple (91 y 94 %, respectivamente, del material que se emplea en formar los tres lados del cuadrado), y aún así las películas de jabón eligen invariablemente una y no otra.

¿Se da la unión cuádruple en las películas de jabón? Momentáneamente, sí. Soplando con suavidad por el tubo de un cuentagotas sobre el segmento central de la película, podemos distorsionar los tabiques de forma que las cuatro películas se agrupen en un punto. Sin embargo, cuando dejamos de soplar, las películas se separan de inmediato, el segmento central se reconstruye y vuelve a formarse el modelo original en su posición primitiva, o en otra obte-

Fig. 139

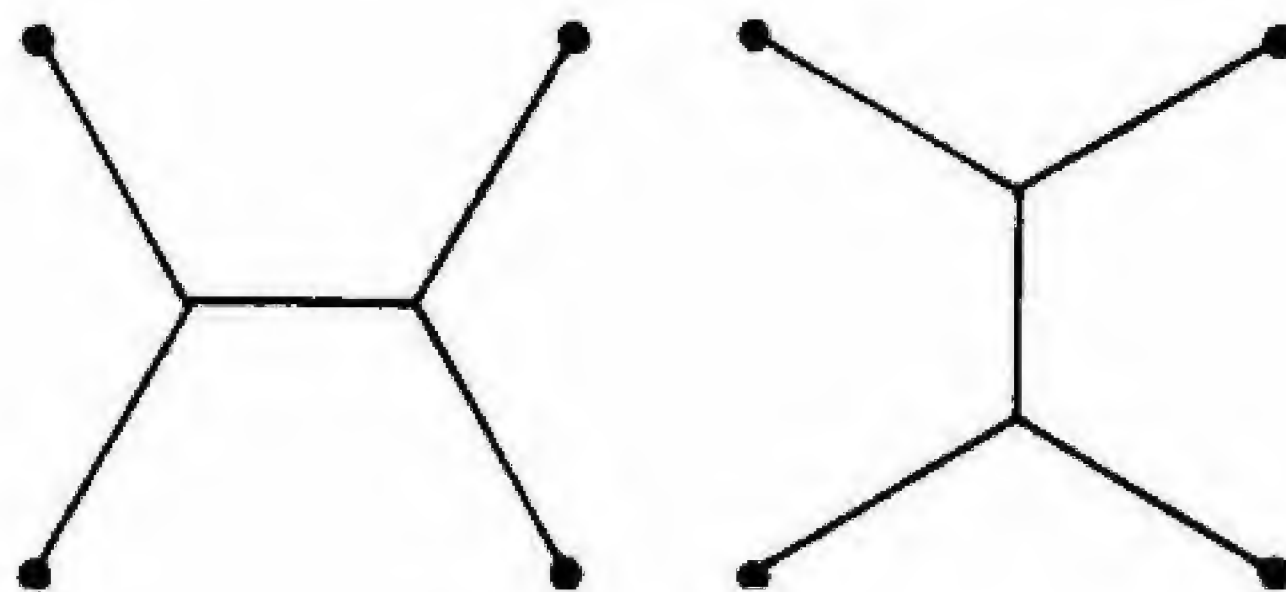
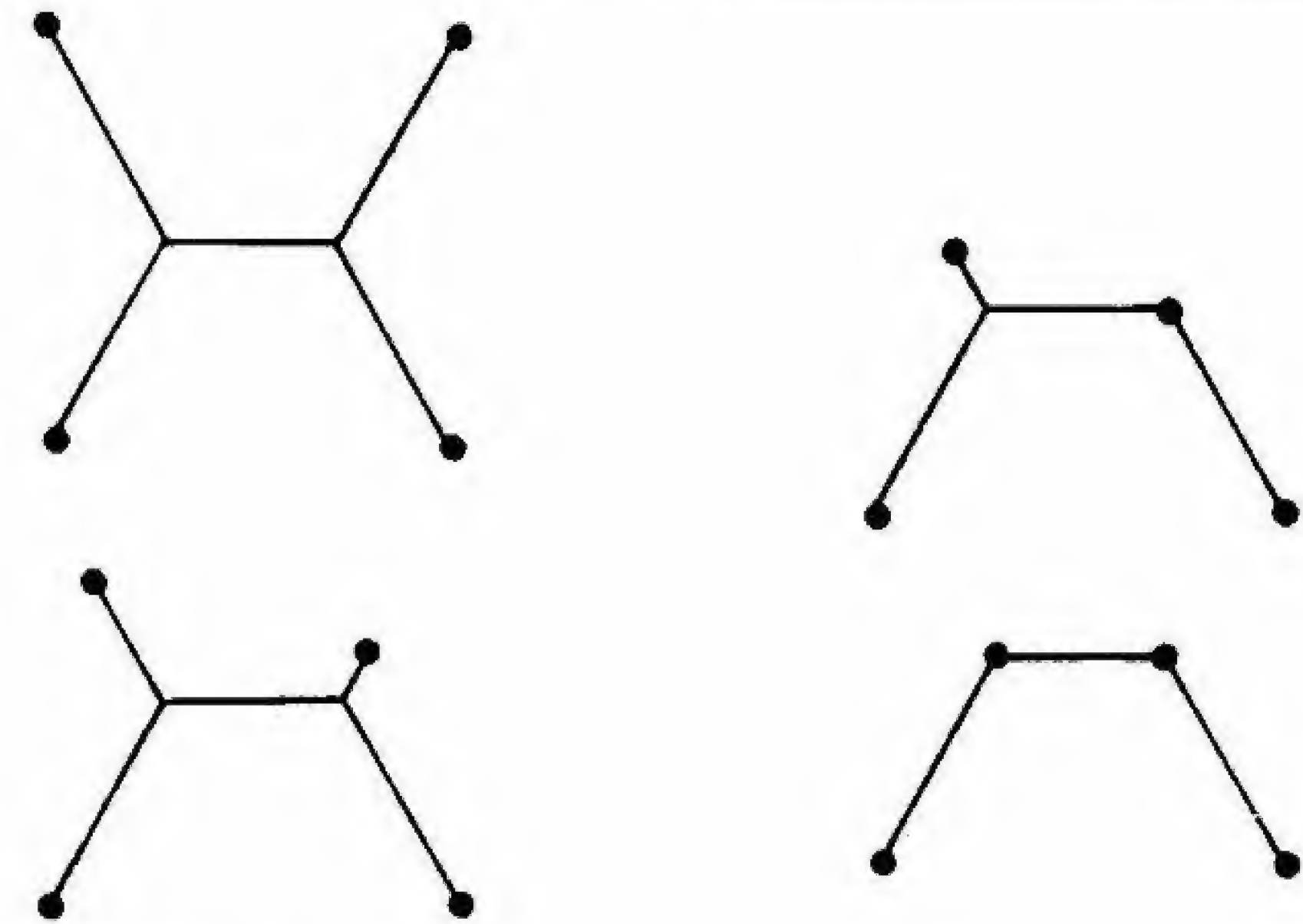


Fig. 140

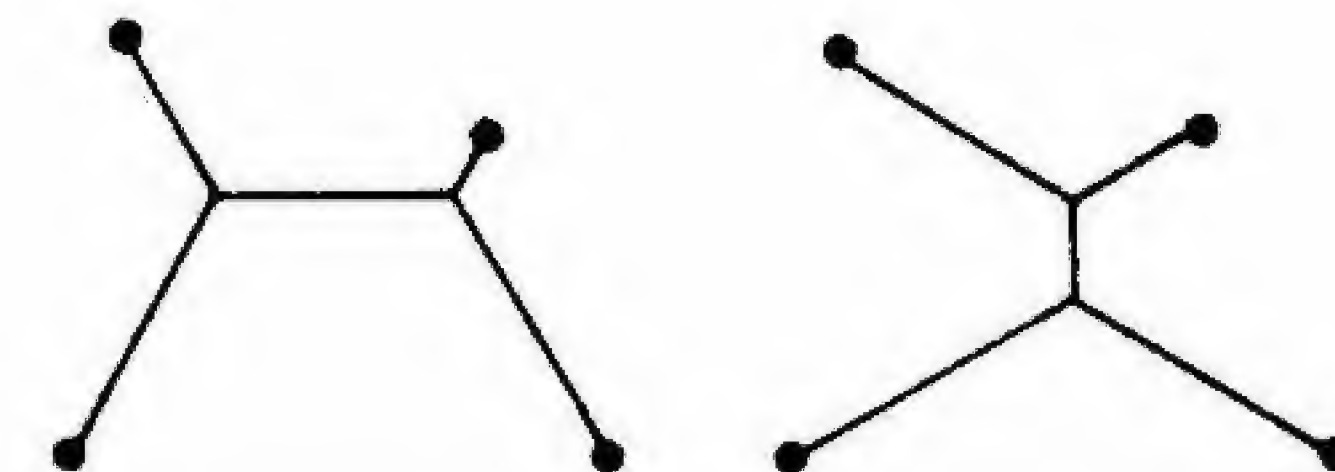


nida haciendo girar la original  $90^\circ$ . La figura 139 muestra el modelo en sus dos posiciones: la segunda es equivalente a la primera después de someter ésta a un giro lateral.

De la misma forma que la unión triple se desplaza hacia el ángulo mayor del triángulo, también se mueve hacia el ángulo mayor del cuadrilátero. La figura 140 muestra con claridad este movimiento y la degeneración de las dos uniones triples a medida que las cuatro chinchetas se mueven. Como en el caso del triángulo, la degeneración de la triple unión se produce en un vértice con un ángulo de  $120^\circ$  o más.

Supongamos que soplamos sobre las películas que conectan los vértices de un cuadrilátero irregular como el que aparece en la figu-

Fig. 141





ra 141. Puede forzárselas a que formen una unión cuádruple, pero esta vez, cuando se separen, adoptarán una cualquiera de dos configuraciones diferentes. Y veremos algo muy curioso. El sistema de tabicación de la izquierda de la figura 141 es más corto que el de la derecha. Ambas configuraciones representan sistemas mínimos de compartimentalización, pero una de ellas es aún menor que la otra. Al formar el trazado de la derecha, las partículas de jabón cometen aparentemente un error táctico: ocupan una extensión mayor que si hubieran adoptado el modelo de la izquierda.

El error táctico de las partículas de jabón es de la misma clase que el error de las gotas de lluvia al caer en las montañas. Todas ellas fluyen pendiente abajo, pero algunas quedan atrapadas en lagos de montaña y otras van a los ríos que terminarán alcanzando el mar. La gota que acaba su recorrido en el mar pasa a una altitud menor (y por tanto también es menor su energía potencial) que la que reposa en el lago de montaña, pero para su terreno dado ambas han encontrado las posiciones de menor energía. De manera similar, las partículas de jabón y de agua tienden hacia una configuración de mínima energía y, según la forma en que las láminas de vidrio sean sacadas de la solución jabonosa, las películas adoptarán una configuración u otra.

Hasta ahora hemos usado cuatro chinchetas en nuestras experiencias. Supongamos que añadimos más. Una ordenación regular de cinco dará lugar a tres uniones triples y el sistema de películas adoptará cualquiera de las cinco posiciones que aparecen en la figura 142. Seis de ellas originarán cuatro uniones triples en cualquiera de las configuraciones de la figura 143, aun cuando éstas tienen un 4 % más de longitud que la configuración que une cinco de las chinchetas directamente. Cuál de los modelos de la figura 143 sea adoptado dependerá de cómo se extraigan las láminas de vidrio de la solución jabonosa. Cada configuración se sitúa en el punto más bajo de un declive de energía independiente, y puede obtenerse una a partir de la otra tan sólo soplando en la unión de las películas para remontar la pendiente energética.

Supongamos que añadimos una serie completa de chinchetas a nuestras láminas de vidrio, por ejemplo treinta. Podríamos obtener una configuración de películas como la que aparece en la figura

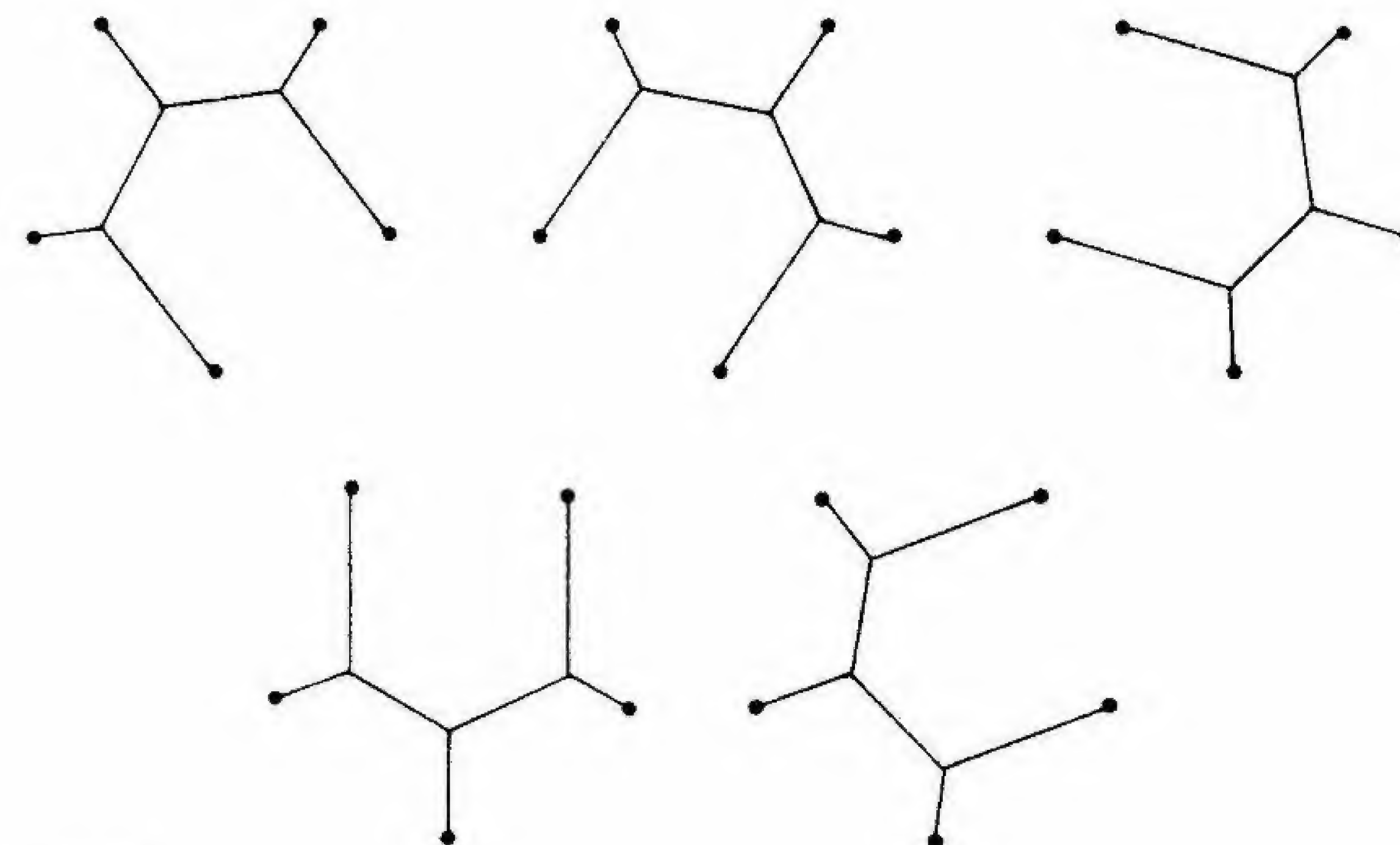


Fig. 142

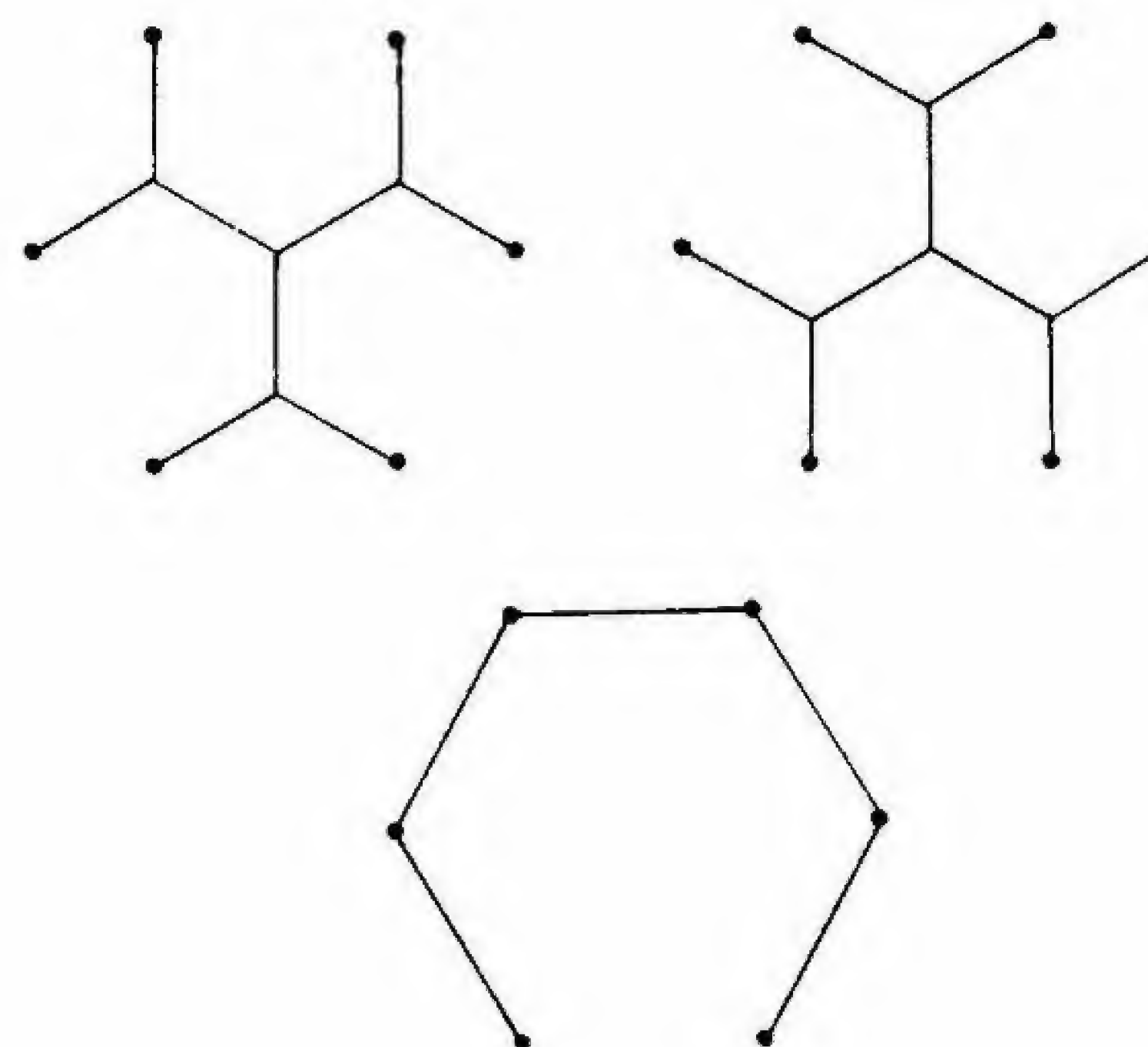


Fig. 143



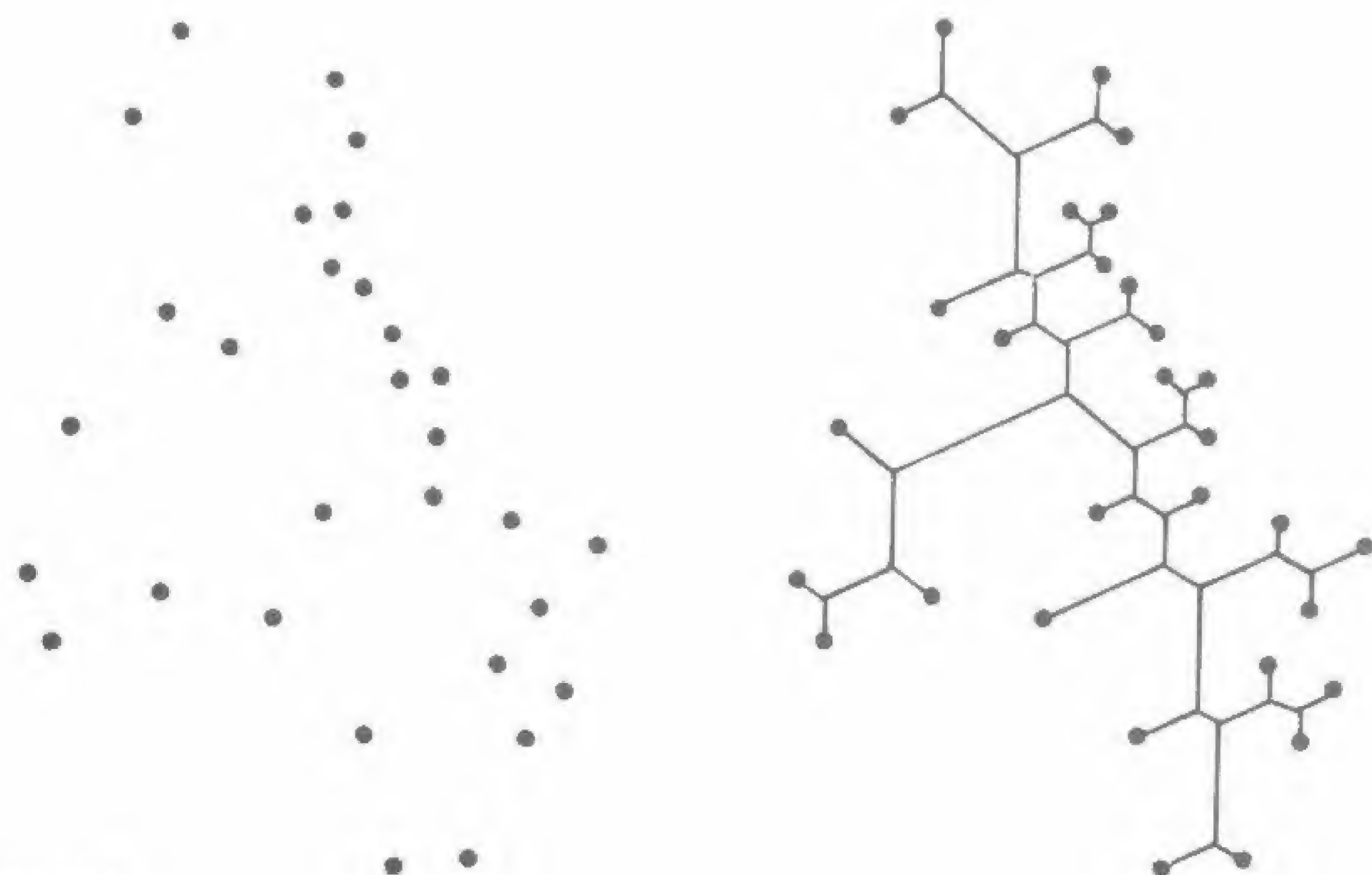


Fig. 144

144. La fórmula topológica que ya hemos utilizado otras veces nos dice que tendremos en dicha configuración 28 uniones triples si ninguna de ellas degenera. La fórmula es:

$$J_1 - J_3 = 2$$

Es decir, el número de puntos (o uniones simples) menos el de uniones de tercer orden es igual a dos. Como se recordará, utilizamos la fórmula para describir la ramificación de los ríos en el capítulo 5, y ahora vemos lo apropiada que resulta para describir también las propiedades topológicas de las películas de jabón de las figuras 136 a 144.

### Superficies reducidas

Vamos a suponer que quitamos todas las chinchetas y colocamos las placas de vidrio una contra otra, las introducimos en la solución jabonosa, las sacamos y posteriormente las separamos. Ob-

tendremos entonces un modelo como el que aparece en la figura 145, en el que hay que resaltar su gran parecido con el de la figura 144, que muestra un sistema reticular de películas mínimo.

En lugar de la solución jabonosa que se extiende entre las placas, probemos a introducir en el espacio existente entre ellas una gota de pintura. La figura 146 muestra el modelo de ramificación formado por dicha gota una vez que se han separado las láminas. Nuevamente observamos una red de películas interconectadas, pero esta vez el modelo es mucho más complicado que cualquier otro de los que hayamos podido generar con las chinchetas y las láminas de vidrio.

La complejidad proviene de que en el fenómeno hay más de una fuerza implicada: el material fluye y al mismo tiempo se contrae y minimiza tanto el trabajo que realiza como el área por la cual se extiende.

Si las placas de vidrio se separan lentamente, veremos que la solución fluye a los puntos donde el espacio entre las placas es menor: va de las zonas en las que las láminas se encuentran más separadas a aquellas en las que la separación es mínima. Sabiendo esto, sería correcto suponer que las láminas deben haberse separado en primer lugar por la parte superior derecha en la figura 145 y por la de abajo en la 146. El material fluyó en ramificaciones de grosor creciente a partir de estos puntos de separación inicial.

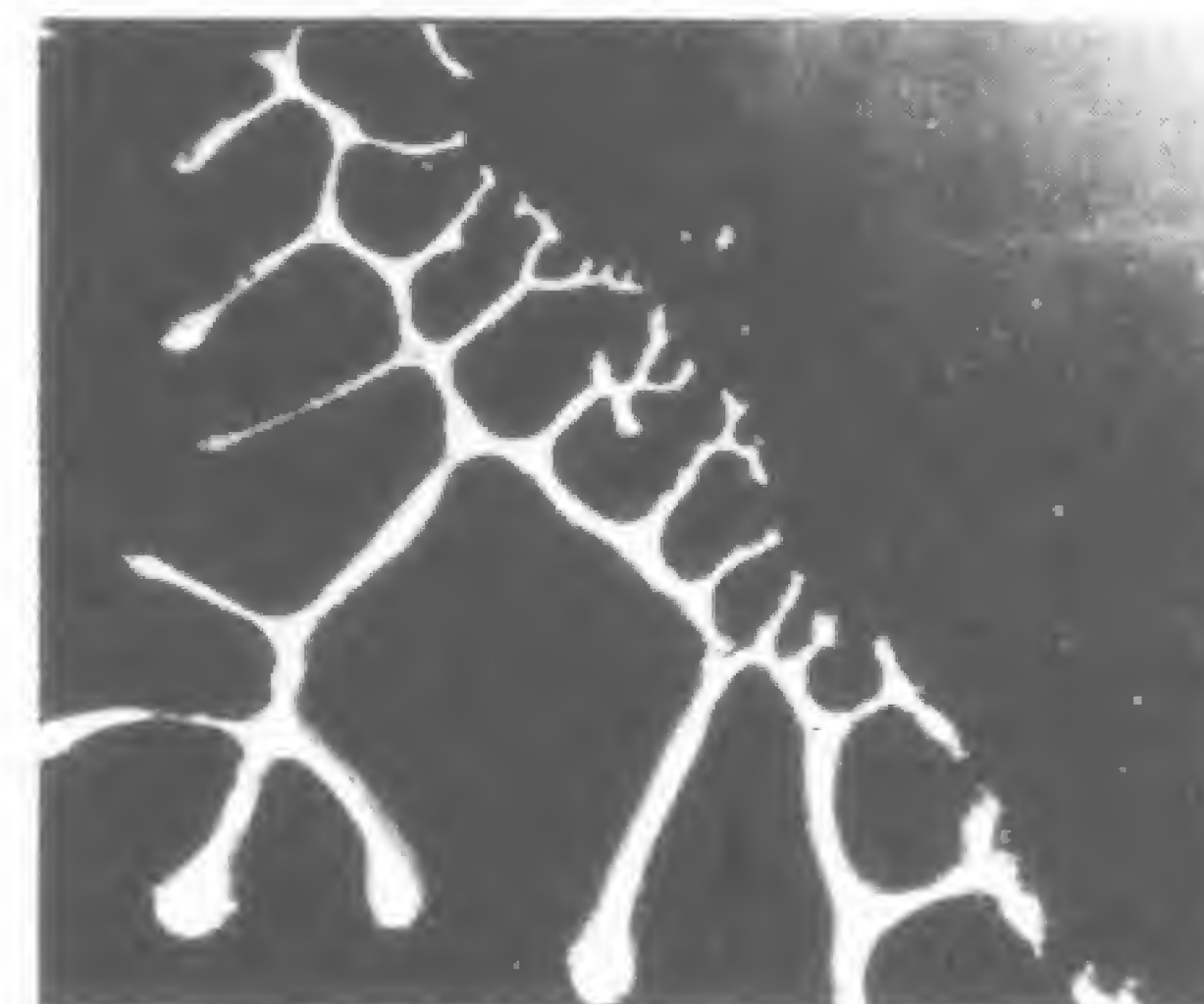


Fig. 145



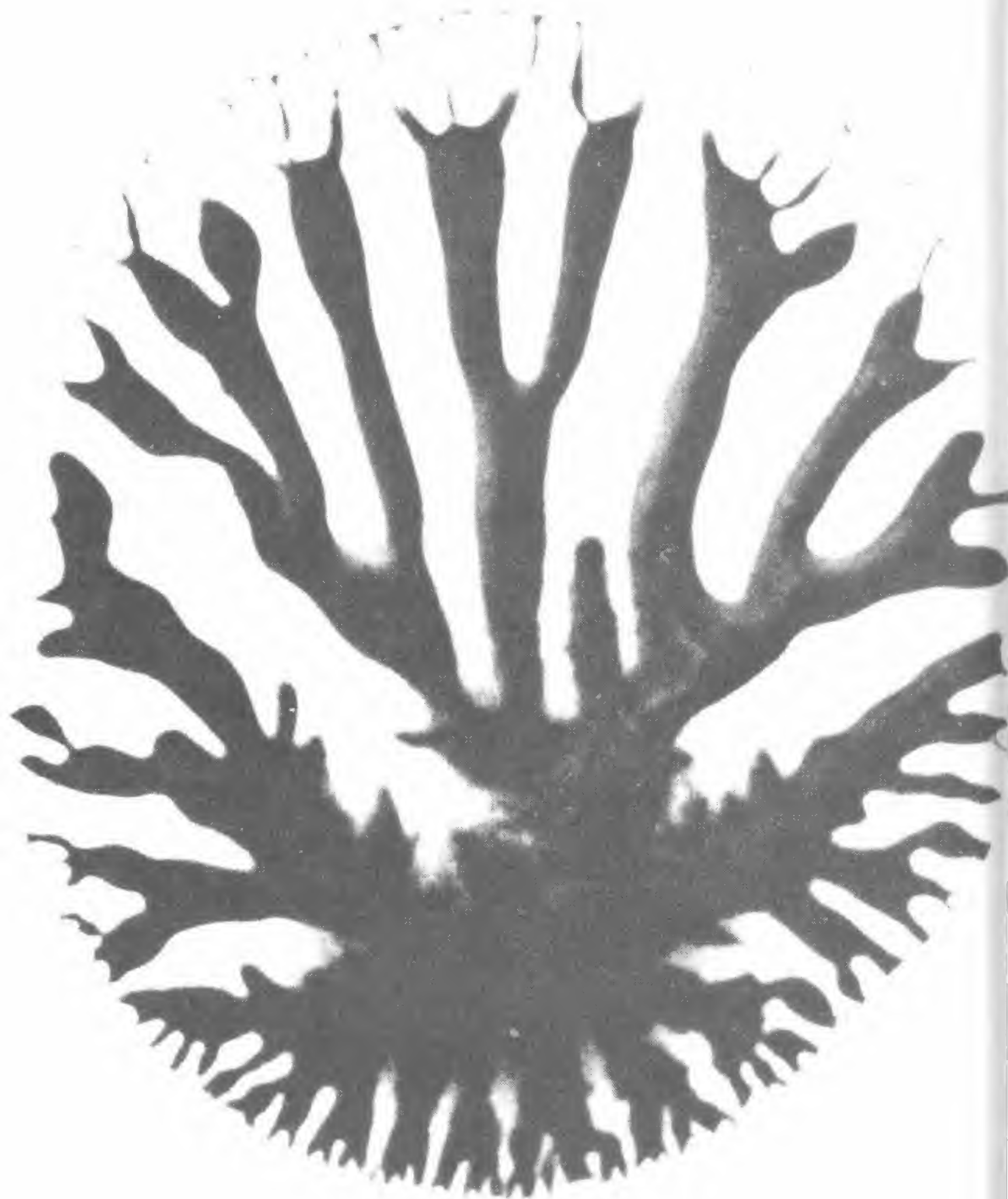


Fig. 146

El proceso de flujo reduce el valor de los ángulos de  $120^\circ$  que se formarían si actuara únicamente la tensión superficial. Recordemos que Murray predijo ángulos de  $75^\circ$  para representar la separación mínima de dos ramas iguales bajo condiciones de «flujo puro», y de  $120^\circ$  para describir la separación de tales ramas en condiciones de «tensión superficial pura». Según esto, en una situación en la que están presentes tanto el flujo como la tensión superficial cabría esperar la formación de ángulos comprendidos entre  $75^\circ$  y  $120^\circ$ . Los ángulos de la figura anterior se encuentran dentro de este intervalo.

Es también útil observar lo que ocurre entre las placas de vidrio cuando se hallan separadas sólo parcialmente. La figura 147a

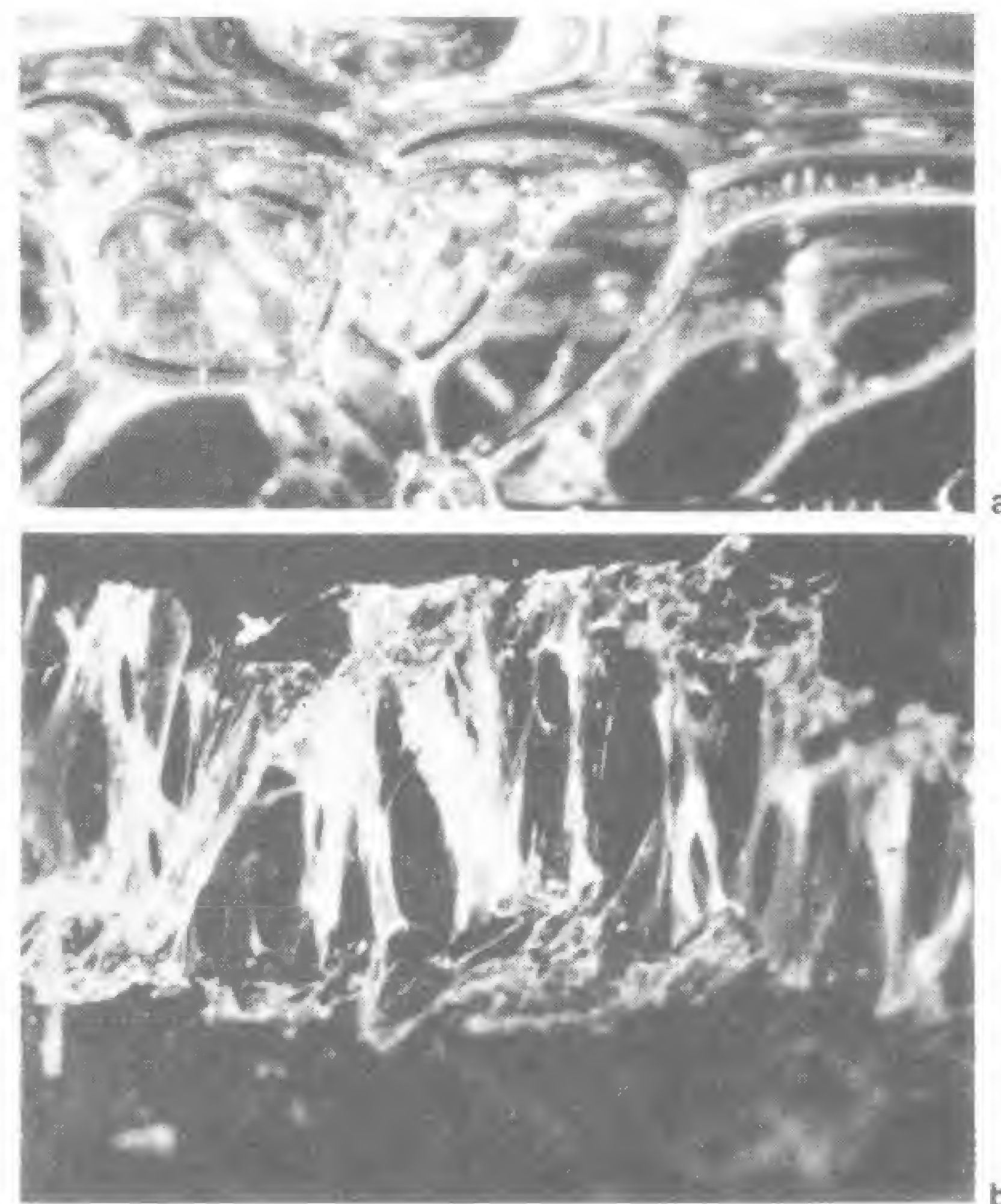
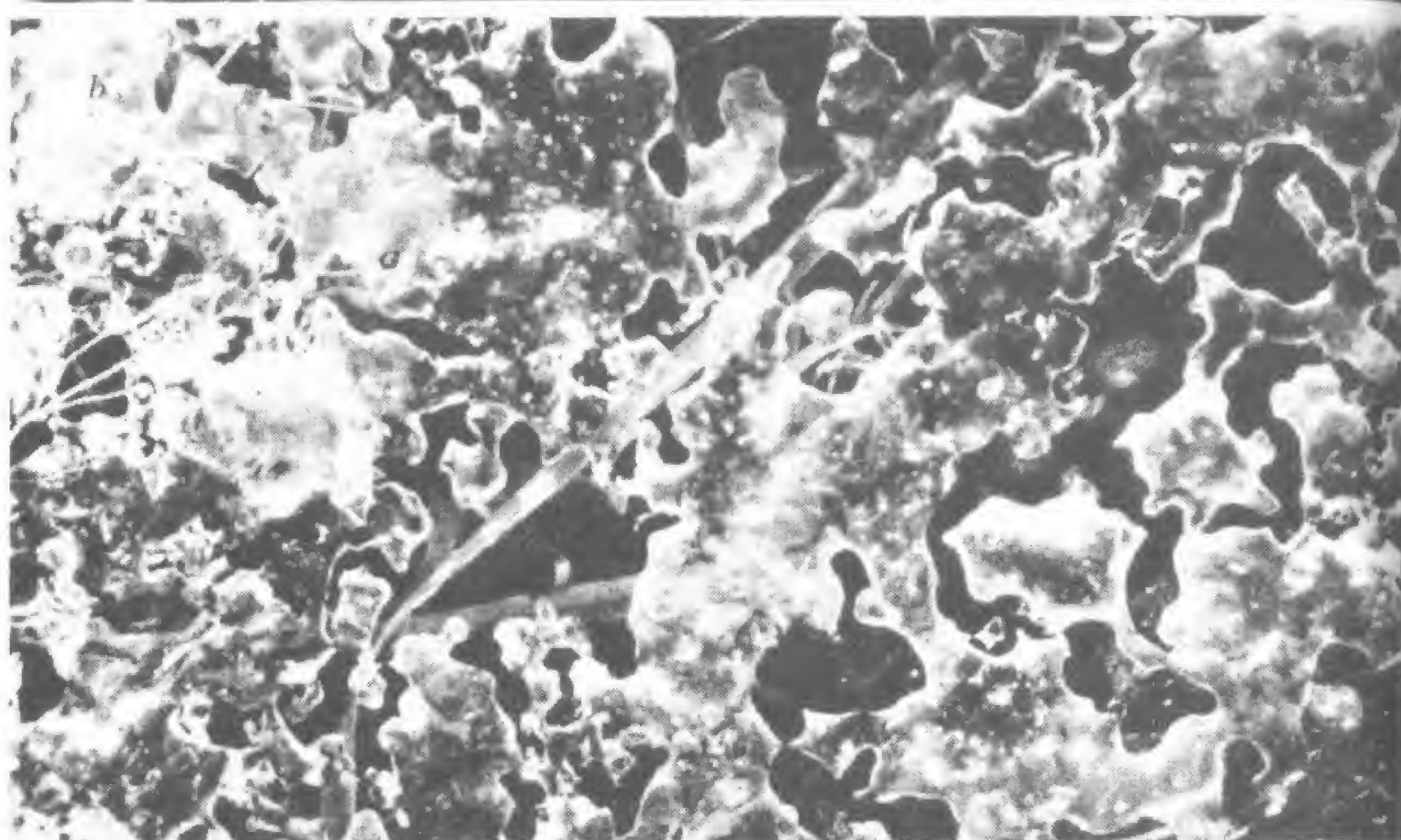
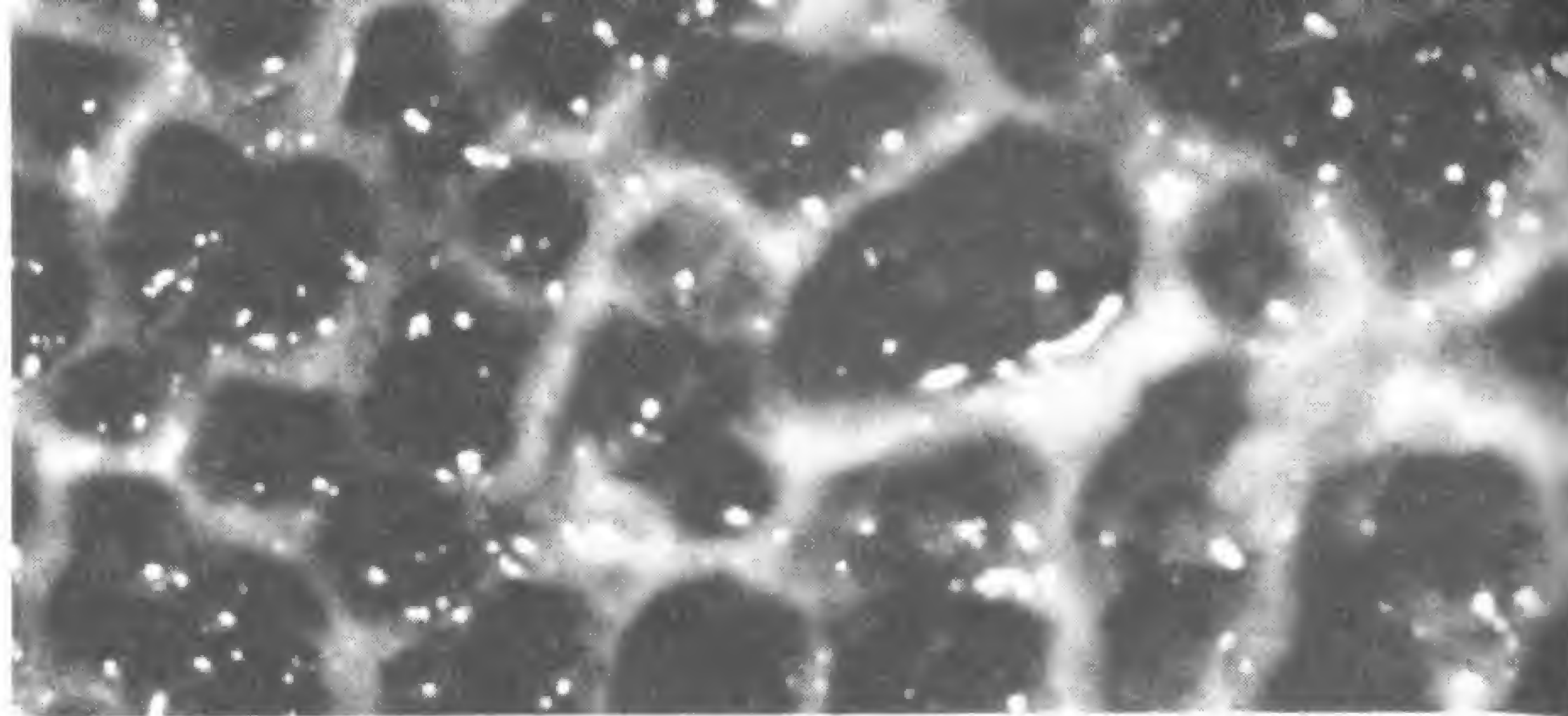


Fig. 147





muestra una perspectiva de ello, en la que vemos las reveladoras uniones de  $120^\circ$ . Para un material más viscoso, como cola, la separación de las láminas de vidrio origina el modelo de la figura 147b, en el cual los ángulos de  $120^\circ$  aparecen mucho más modificados. Esta figura nos recuerda los refuerzos que veíamos entre las caras superior e inferior del caparazón del cangrejo bayoneta en la figura 19e. Tal vez dicho refuerzo proceda de la acción de la tensión superficial a medida que las dos regiones del caparazón se separan en el transcurso del crecimiento.

Podemos observar con facilidad otros muchos ejemplos de superficies reducidas. Uno de ellos, en el cual las uniones triples están particularmente bien definidas, es el de la leche calentándose que aparece en la figura 148a, donde una pequeña parte de aquélla mantiene su configuración mínima mientras el resto ha hervido. En las figuras 148b y c vemos, respectivamente, restos de nieve fundiéndose en la hierba y la espuma que forman las olas en el océano uniéndose entre sí para minimizar su superficie.

La reducción de superficies nos permite comprender la notable coincidencia de formas en la figura 149, en la que vemos cómo se asemejan entre sí el caparazón de una tortuga y un grupo de burbujas dispuestas de manera regular. Sabemos que las películas existentes entre las burbujas minimizan su área y se unen entre sí con ángulos de  $120^\circ$ , y lo mismo ocurre con los surcos dispuestos entre las diferentes placas del caparazón de la tortuga. Nuevas células crecen a lo largo de estos surcos y tienden a situarse en la periferia a fin de unir los bordes de las placas. Por consiguiente, a medida que las placas aumentan su tamaño, los surcos existentes entre ellas mantienen una superficie mínima.

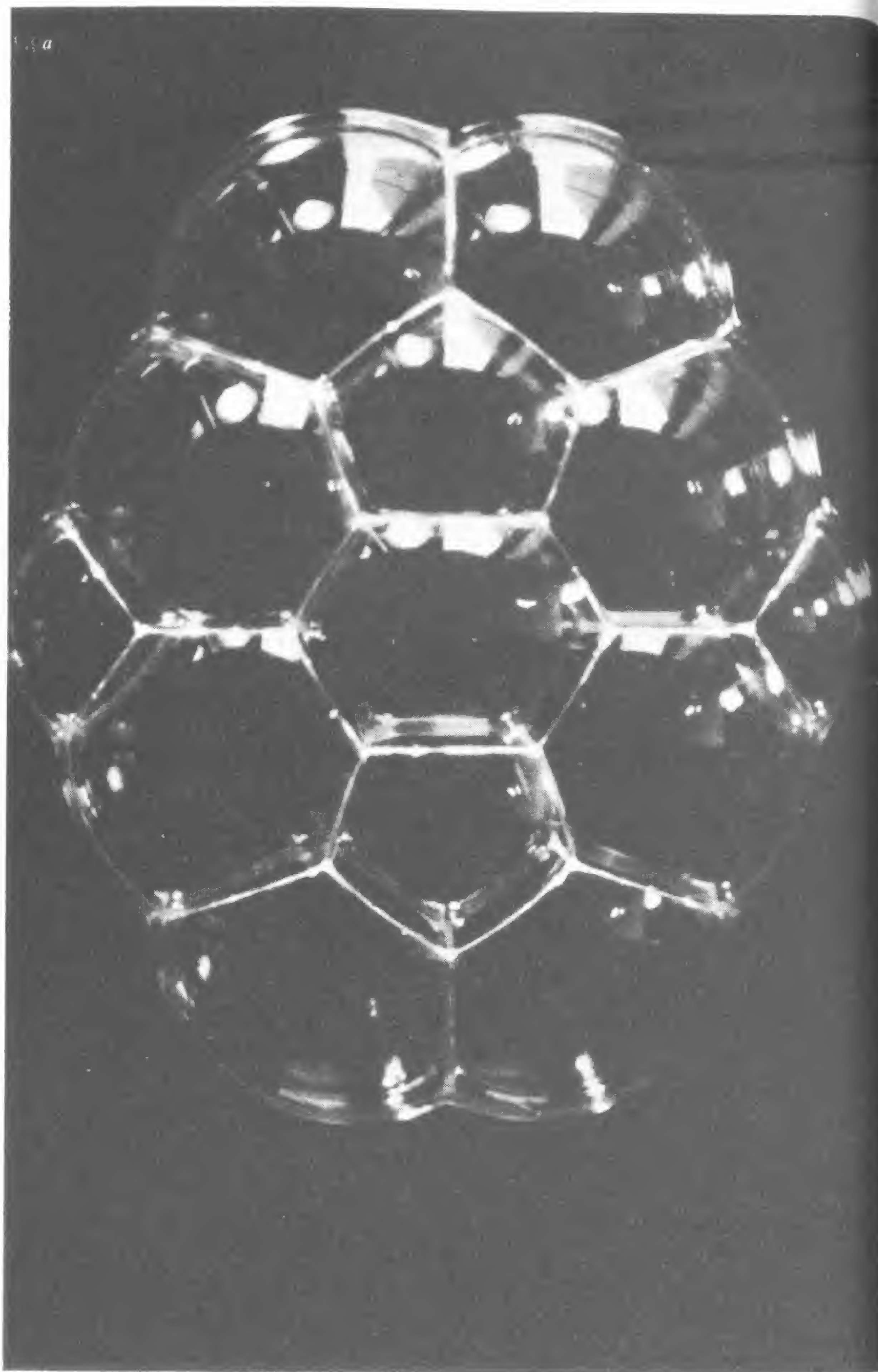
### Gránulos de cristal

Comprendemos ahora un tipo de crecimiento muy generalizado en la Naturaleza, que se da tanto en la acumulación de células para formar las placas del caparazón de una tortuga como en la agregación de moléculas para constituir los gránulos de un cristal.

Un gránulo de cristal se compone de un grupo de átomos o moléculas dispuestos ordenadamente en filas y capas, de forma seme-

◀ Fig. 148







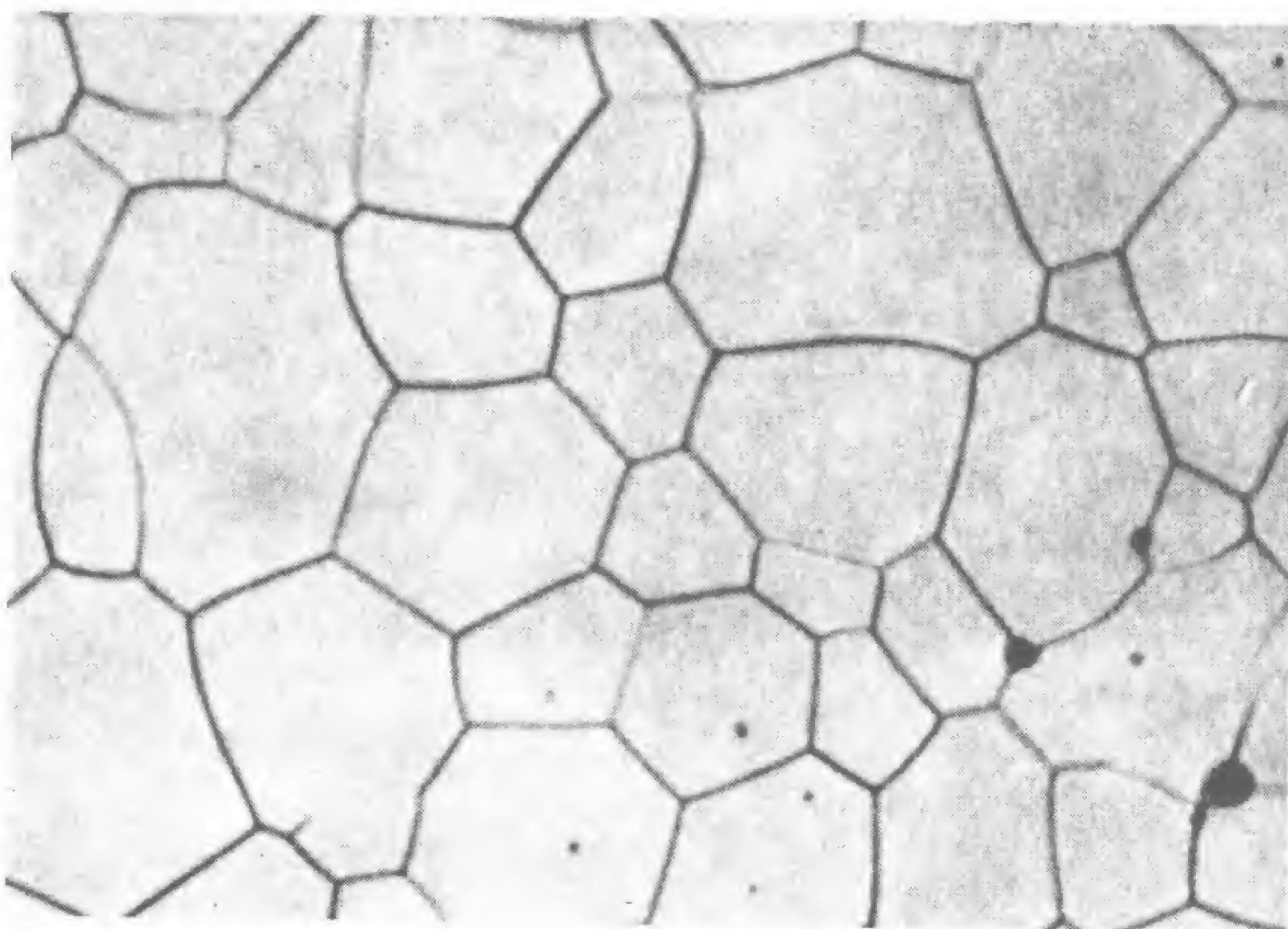


Fig. 150

jante a como se disponen un conjunto de naranjas en un anaquel. Cada molécula se ubica con precisión junto a sus vecinas. Cuando otras moléculas de tamaño y estructura similares rellenan los espacios que hay a lo largo de la superficie del gránulo, éste crece y continúa haciéndolo hasta que tropieza con otro gránulo. Si cada uno de ellos tiene una orientación diferente, surge una situación conflictiva con respecto al control de los átomos y moléculas que se hallan en medio, los cuales se ven sometidos a fuerzas contrarias y se mantienen en un estado de agitación sin unirse definitivamente a ninguno de los gránulos. La cantidad de moléculas que se encuentran en esta situación es siempre mínima debido a las acciones que ejercen sobre las mismas las moléculas de los gránulos vecinos. Es decir, que la frontera entre los gránulos es minimizada, como ocurre con los límites entre las placas del caparazón de la tortuga o entre las burbujas. Por esta razón, los gránulos de cristal que aparecen en la microfotografía de la figura 150 parecen burbujas.

La figura 151 muestra un cristal con dos clases de gránulos.

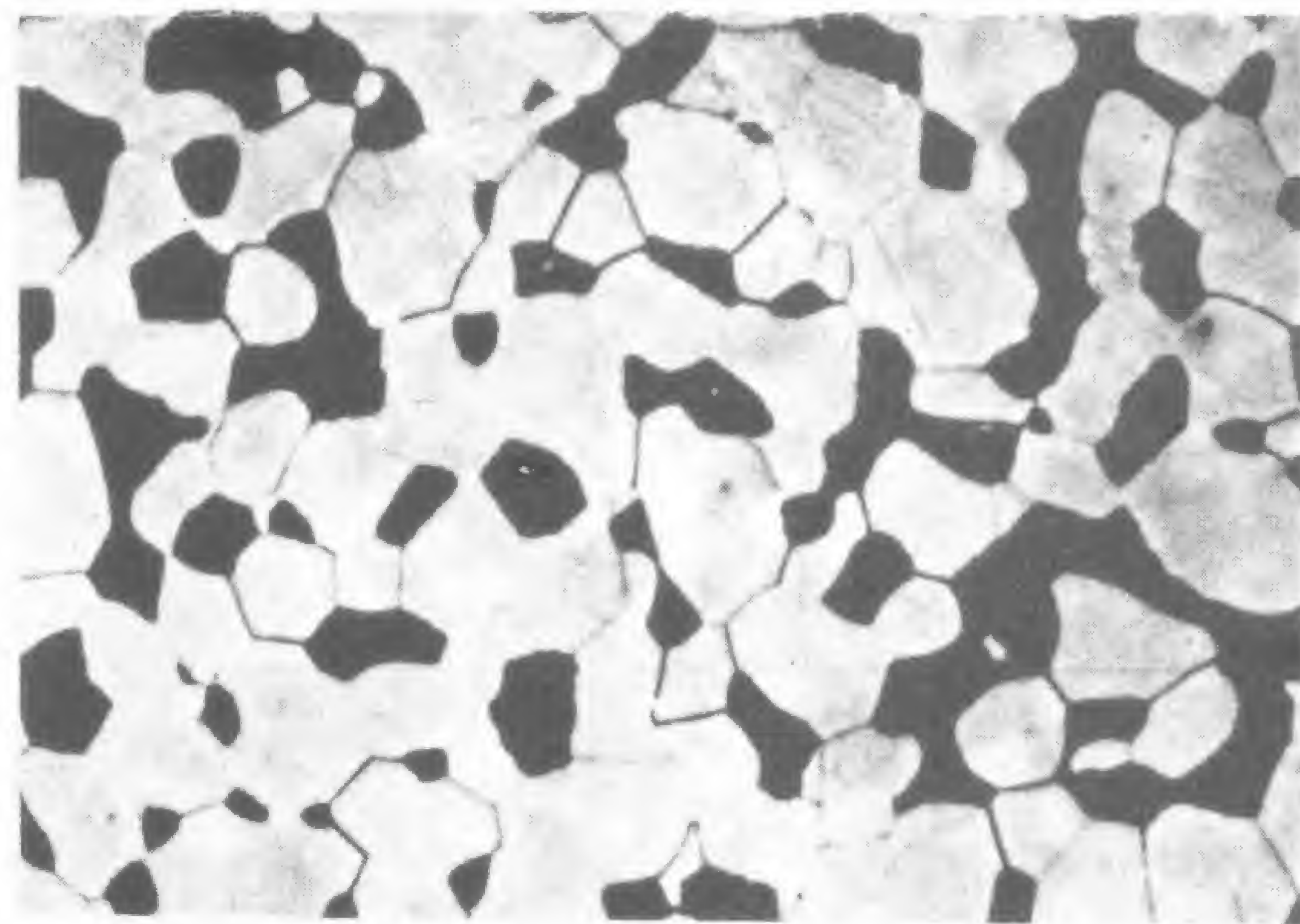
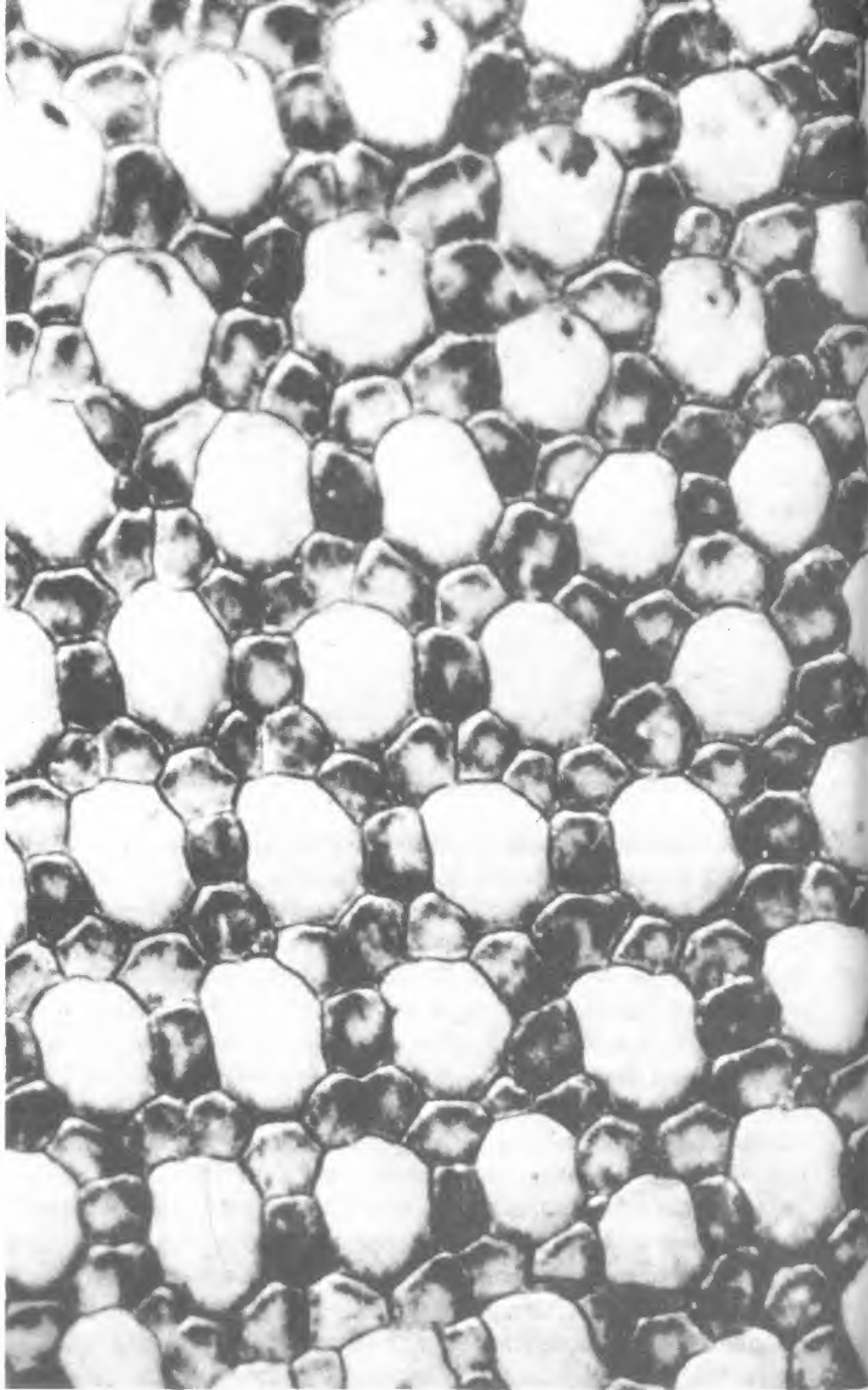


Fig. 151

Aparentemente, la superficie de los gránulos negros ejerce una atracción algo mayor que la de los blancos, lo que permite a los primeros agruparse entre sí y aislarse de los últimos, de la misma forma que la nieve residual se aísla de la hierba y el aire que la rodean. Observe el lector que los límites de los gránulos negros no tan apenas distorsiones originadas por los límites de los blancos. Estos últimos se unen a los negros con ángulos de menos de  $120^\circ$ , mientras que entre sí lo hacen con ángulos de exactamente  $120^\circ$ .

El modelo de la figura 152 parece también formado por dos tipos de gránulos cristalinos; en este caso, sin embargo, los supuestos gránulos son en realidad las escamas de un armadillo. No está del todo claro si las escamas crecen como las placas del caparazón de la tortuga o si están influidas directamente por los efectos de la tensión superficial. Es obvio, no obstante, que la interfase o límite existente entre las escamas ha sido minimizado y que únicamente pueden darse uniones triples. Y, como en el caso de los gránulos negros en el cristal de la figura anterior, las escamas blancas del ar-





madillo parecen ejercer una mayor atracción en estas zonas limítrofes. Las escamas blancas son redondeadas y aparecen aisladas, en tanto que los límites entre las negras se unen con ángulos de menos de  $120^\circ$ .

### Espuma

Hasta aquí nos hemos ocupado de modelos bidimensionales de uniones de tercer orden. Hemos estudiado *líneas* que formaban ángulos de  $120^\circ$ . En realidad, todos nuestros modelos son tridimensionales, es decir, que las líneas constituyen tabiques o superficies de separación que se unen entre sí con ángulos de  $120^\circ$ .

Para ver estas superficies en sus tres dimensiones, basta examinar la espuma, constituida por burbujas, que se forma en el fregadero, en una jarra de cerveza o en una ola. En ella observamos diferentes porciones de espacio, a modo de pequeñas cámaras, cada una diferente de sus vecinas y, aun así, perfectamente unidas entre sí en un increíble y complejo rompecabezas tridimensional.

Si miramos con más detenimiento, vemos que cada línea de esta espuma es la unión de tres películas que forman un ángulo de  $120^\circ$ , y que cada una une otras tres líneas para originar un vértice en el que confluyen seis películas. Dondequiera que se mire, el modelo es el mismo: en cada línea se encuentran tres películas y cada punto representa la confluencia de cuatro líneas. Toda esta infinita variedad se basa en un único plan.

La figura 153 es una fotografía de la superficie de una espuma. Con el fin de aislar una unión de las otras y estudiarla en detalle, podemos fabricar un tetraedro de alambre como el que aparece en la figura 154a y sumergirlo en la solución jabonosa. Cuando se extrae de ésta, las películas se deslizan automáticamente desde los alambres hacia el centro de la estructura, donde se juntan en un único punto. Esta unión es constante en la espuma. Semejante ordenación de las películas alrededor de un punto central utiliza la menor cantidad posible de material para interconectar los alambres. Podemos calcular fácilmente, por ejemplo, que la ordenación usa sólo el 82 % del material que sería necesario emplear a fin de cerrar tres de las cuatro caras externas de la estructura.



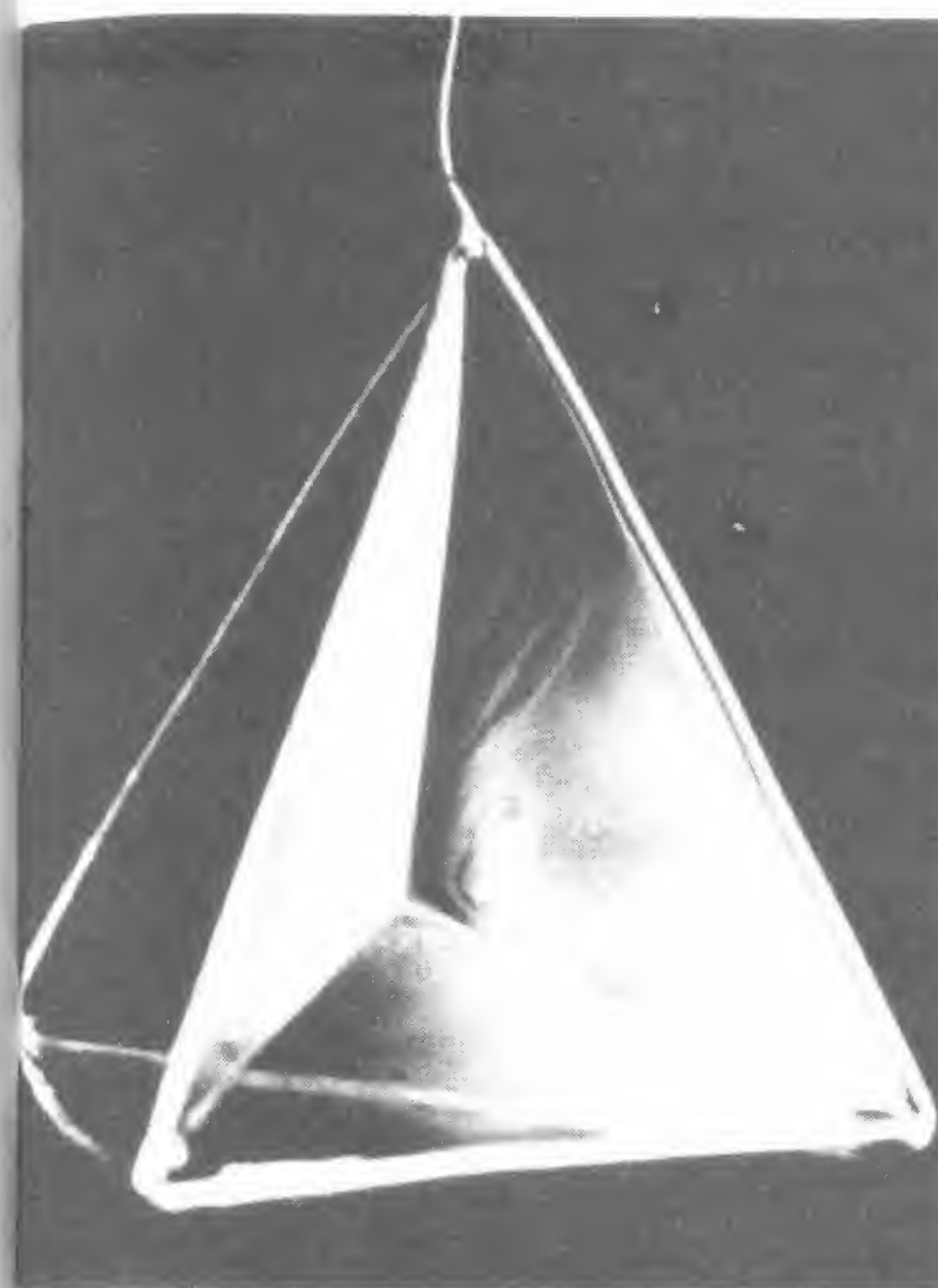
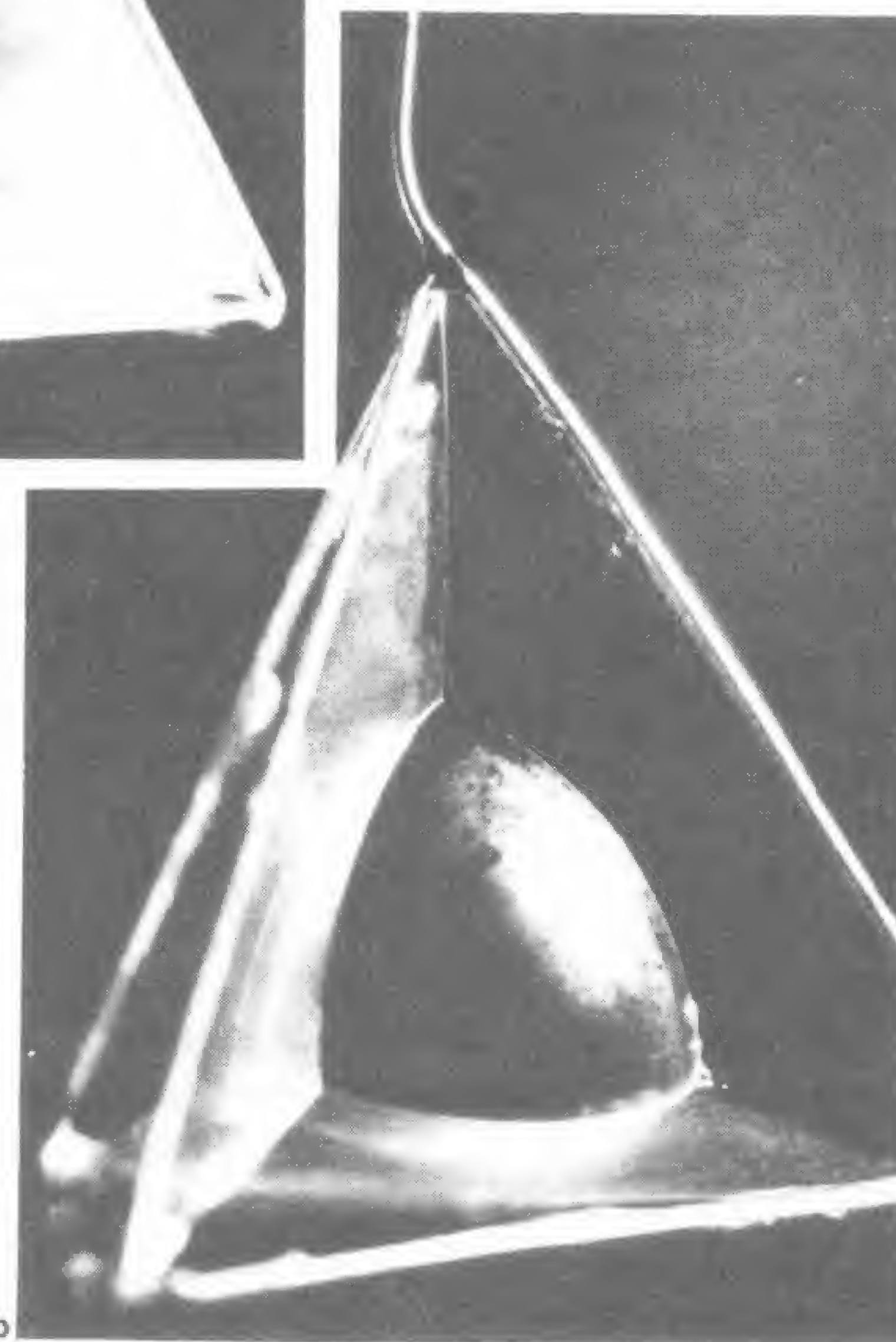


Fig. 154



◀ Fig. 153



Cerca de los vértices de la estructura de alambre, tres películas se unen entre sí en ángulos de  $120^\circ$  para dar lugar a una línea recta. Pero ¿qué ocurre en el centro, donde se encuentran cuatro líneas? Utilizando algunos elementos de trigonometría podemos comprobar que el ángulo comprendido entre dos líneas y el centro tiene un coseno de  $-1/3$ , por lo que dicho ángulo vale  $109^\circ 28' 16''$ .

¡Un ángulo verdaderamente extraño!  $109^\circ 28' 16''$ . Es inconmensurable, como el ángulo de  $137^\circ 30' 28''$  que utilizábamos para trazar los puntos de la figura 132a y describir la filotaxis. Vimos, sin embargo, que la planta no precisa alinear sus elementos según dicho ángulo, sino que somos nosotros los que lo introducimos con objeto de realizar un diagrama bidimensional que describa un modelo tridimensional de crecimiento. En el caso de las películas de jabón, la situación es distinta. El ángulo de  $109^\circ 28' 16''$  se da realmente en el centro de la estructura tetraédrica. Y aún más, dicho ángulo se ha formado en todos los vértices de cuarto orden de todas y cada una de las espumas que se han originado desde que el mundo es mundo.

Puede surgir una especie de desconcierto al ver la aparición de un ángulo tan singular e inconmensurable. Los antiguos pitagóricos sin duda habrían experimentado esta desazón. Estos filósofos pensaban, por ejemplo, que el hecho de que la diagonal de un cuadrado fuera inconmensurable con el lado era algo así como un pecado cometido por el Gran Arquitecto y que debían mantener su descubrimiento en secreto a fin de no atraer la cólera divina. El filósofo platónico Proclo repite esta historia.

«Aquellos que fueron los primeros en divulgar el secreto de los números irracionales perecieron en naufragio del primero al último, ya que lo inexpresable, lo informe, debe ser mantenido en el más absoluto secreto. Los que divulgaron y describieron este aspecto de la vida perecieron instantáneamente y errarán zarandeados por las olas por toda la eternidad.»

Un interesante paralelismo con las ideas pitagóricas acerca de la inconmensurabilidad se encuentra en las modernas palabras de

Buckminster Fuller cuando describe el uso del número pi por la Naturaleza:

«Yo me preguntaba: ¿cuántos decimales de *pi* obtuvo la Naturaleza antes de comprobar que su cómputo no podía ser concluido? Después volvía a interrogarme: ¿cuántos decimales arbitrarios obtuvo la Naturaleza en las magnitudes irracionales trascendentes antes de que decidiera que era una ardua tarea y la abandonase? Si la Naturaleza utilizó *pi* ha tenido que hacer lo que podríamos llamar una especie de trampa al llevar a cabo sus proyectos, lo que significa improvisar y realizar una serie de maniobras acomodaticias. Cuando pensaba en la Naturaleza, obligada a tomar un número tan grande de decisiones frustradas cada vez que debía construir una burbuja, sentía compasión por ella. No comprendía cómo podía arreglárselas para formular la estela de cada barco que navega en la mar mientras dirigía el resto del Universo si tenía que tomar todas esas decisiones.»

Por fortuna para la Naturaleza, la pesadilla pitagórica no se materializa nunca. La Naturaleza no compara la diagonal del cuadrado con el lado de éste para descubrir la existencia de la irracionalidad, ni tampoco compara la circunferencia de un círculo con su diámetro para averiguar la naturaleza trascendental de pi o computa el coseno de  $-1/3$  para obtener un ángulo de  $109^\circ 28' 16''$ . Ella simplemente deja que las moléculas actúen como puedan, y las tres películas que se unen para constituir un ángulo de  $120^\circ$  no difieren de las cuatro que se unen en un ángulo de  $109^\circ 28' 16''$ . Para la Naturaleza, un ángulo resulta tan sencillo de construir como el otro.

Veamos cómo surgen estos ángulos inconmensurables también en otras situaciones. Supongamos que introducimos de nuevo la estructura de alambre con sus películas ya formadas en la solución jabonosa. Esta vez, cuando la sacamos, aparece en el centro un tetraedro esférico, como se ve en la figura 154b. Nuevamente observamos que todas las películas se unen de tres en tres en ángulos de  $120^\circ$ , y que las líneas que forman lo hacen de cuatro en cuatro en ángulos aproximados de  $109,5^\circ$ . Las películas constituyen la mínima superficie que puede interconectar los alambres y contener la burbuja central.



Si introducimos un cubo de alambre en la solución, las películas no se unen en un único punto central, sino que forman un tabique cuadrado con los lados ligeramente curvados, como revela la figura 155a. Si metemos esta estructura en la solución y la extraemos por segunda vez, varias películas adicionales unen el cuadrado al centro para originar el cubo esférico de la figura 155b. Una vez más, las películas se unen en líneas de tres en tres y las líneas unen cuatro puntos simultáneamente de forma que las películas cubren la estructura y soportan la burbuja central con la menor cantidad de material posible.

Resulta de especial interés observar que el vértice regular de cuarto orden, de  $109,5^\circ$ , que producen espontáneamente las películas, impide la formación de espuma regular con celdillas asimismo regulares. Si examinamos los poliedros regulares y semirregulares de las figuras 5 y 6 vemos que ninguno tiene ángulos de  $109,5^\circ$ , ni es isomórfico con respecto a las celdillas de la espuma. La figura que más se aproxima a este ángulo es el dodecaedro regular, con sus doce caras pentagonales, que puede apreciarse en la parte inferior de la figura 5. Sus ángulos son de  $108^\circ$ , y Edwin B. Matzke, que ha examinado con un microscopio binocular seiscientas burbujas situadas en la región central de la espuma más uniforme que pudo conseguir, halló que el 8 % de ellas eran dodecaedros pentagonales irregulares. Como vimos en el capítulo 1, el agrupamiento de poliedros de caras pentagonales no es capaz de ocupar de manera uniforme todo el espacio disponible, y por tanto no podemos esperar encontrar una espuma constituida únicamente a base de dodecaedros pentagonales.

Estudiando el problema planteado a la Naturaleza a la hora de intentar formar una espuma regular, lord Kelvin propuso una sugerencia muy atractiva. El célebre físico observó que el octaedro truncado que aparece en la figura 6 (el tercer poliedro por la izquierda de la fila superior), que tiene ocho caras hexagonales y seis caras cuadradas, presenta en cada vértice dos ángulos de  $120^\circ$  y otro de  $90^\circ$ , de forma que el ángulo promedio del vértice es de  $110^\circ$  (muy próximo por tanto al de  $109,5^\circ$ ). Además, como puede verse en la figura 7, los octaedros truncados, al igual que los dodecaedros pentagonales, se agrupan entre sí para ocupar de modo uniforme

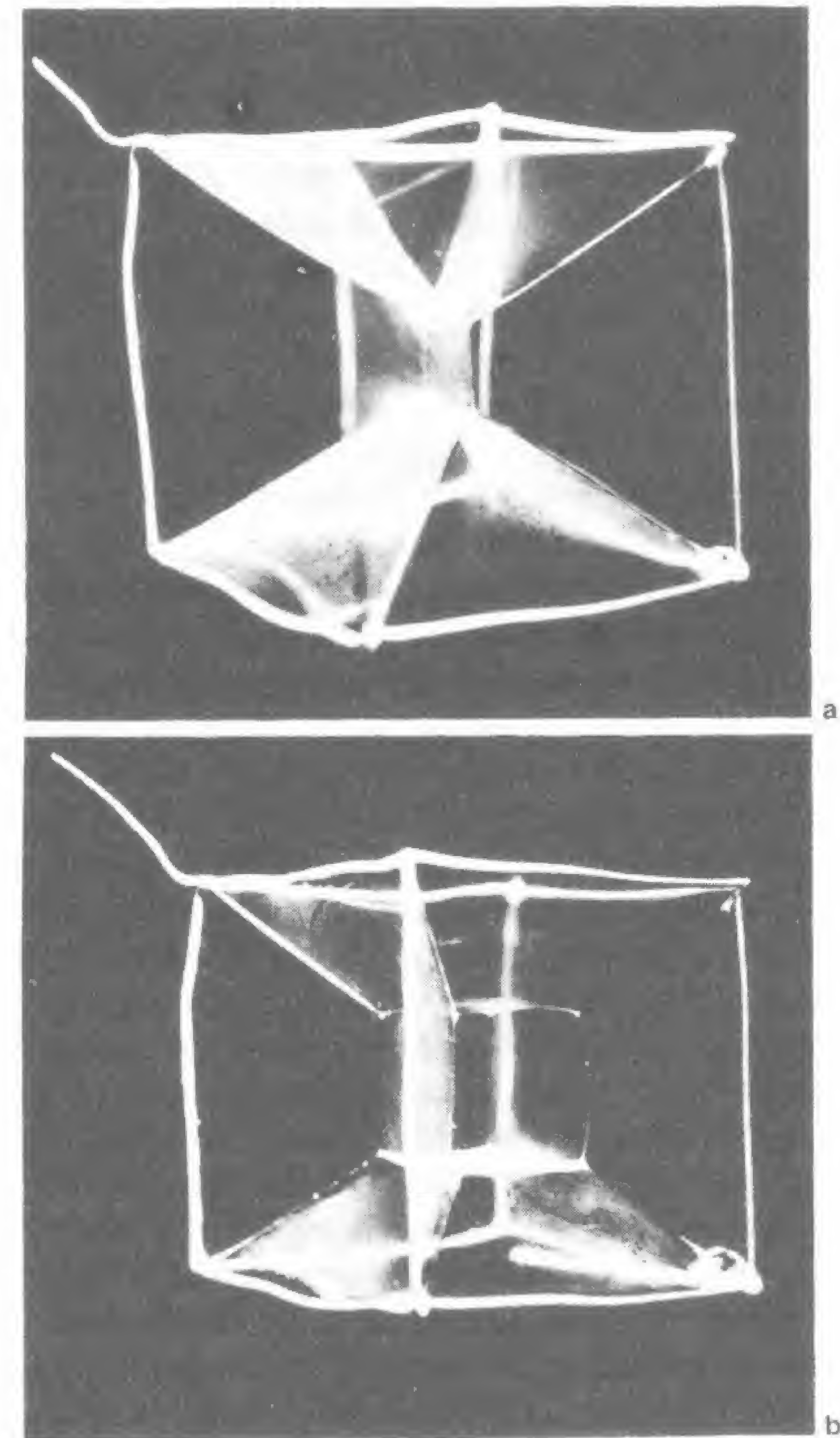


Fig. 155



todo el espacio. Kelvin razonó que alterando ligeramente la forma básica era posible construir los ángulos exactos. El poliedro podía constituir por tanto la unidad estructural de una espuma uniforme. La Naturaleza, sin embargo, no ha hecho caso en apariencia de esta sugerencia. En las seiscientas celdillas examinadas por Matzke no halló octaedros truncados. Parte del problema estribaba en que Matzke no podía conseguir que las burbujas se agruparan de la misma forma en que lo hacían los octaedros truncados. Cada nueva burbuja que se añade a la espuma ocupa de inmediato la posición más ventajosa, sin dar tiempo a que otras se coloquen de forma que todas se vayan disponiendo al unísono. Posiblemente, si las burbujas se mantuvieran en su posición inicial, donde se han formado, se encontrarían octaedros truncados en la espuma que se origina en el fregadero, pero, por ahora, las creaciones de la Naturaleza se hallan lejos del ideal de Kelvin.

Una aproximación más gratificante cuando se pretende describir la celdilla de la espuma no puede conseguirse aplicando los métodos estadísticos. Como explicamos con mayor amplitud en las notas relativas a este capítulo, un polígono que tiene ángulos de  $109^{\circ} 28' 16''$  debe tener 5,104 lados, y para construir un poliedro han de unirse 13,394 de estos polígonos en 22,789 vértices. Estas relaciones son una clara manifestación matemática de las restricciones que impone el espacio, y se derivan del hecho de que las películas se acoplan entre sí en el espacio para originar redes tridimensionales continuas.

Por supuesto, una celdilla concreta con estas características medias es imposible de realizar. No se puede construir un polígono con 0,104 partes de lado o un poliedro con 0,789 partes de vértice. A diferencia de los ángulos o del valor de  $\pi$ , los lados, polígonos y vértices se forman en cantidades enteras: o se tiene un lado o un vértice o no se tiene, no hay una posibilidad intermedia. Estadísticamente, sin embargo, la celdilla «típica» sí puede darse y la misma será un promedio de muchas burbujas en un gran número de espumas distintas. Si, como hizo Matzke, examinamos nosotros también algunos cientos de burbujas, encontraremos que éstas en efecto tienen por término medio de 5 a 6 lados por cara, de 13 a 14 caras y de 22 a 23 vértices.

La enseñanza que obtenemos de todo esto es que los vértices regulares, que surgen inevitablemente de la atracción recíproca de las moléculas, que las lleva a agruparse tan compactamente como sea posible, impide la formación de una espuma uniforme en la que todas las celdillas sean idénticas. Dado que las restricciones que el espacio impone prohíben la existencia de una celdilla concreta con todas estas características, la Naturaleza combina un gran número de celdillas con múltiples características diferentes para obtener así un valor medio. Por fin, las ciegas moléculas alcanzan un orden regular.

### Matemática de las burbujas

A diferencia de las burbujas dispuestas en sistemas reticulares para formar espuma, las burbujas libres son esféricas. Esto no constituye ninguna sorpresa, ya que la esfera es el cuerpo cerrado que posee la superficie mínima. La reducción de la película para formar una esfera es similar a la que experimenta dicha película cuando forma uniones triples entre tres chinchetas: ambas configuraciones utilizan la menor cantidad posible de material en una situación dada.

Si una burbuja esférica cae en una superficie plana, como por ejemplo una lámina de vidrio, se transforma en una semiesfera. En estas condiciones, cuando la burbuja puede sacar partido del vidrio para mantener encerrado el aire que contiene, es la semiesfera y no la esfera la que posee la mínima superficie en relación con su volumen. Estudiemos detenidamente lo que sucede cuando la esfera se transforma en una semiesfera, y analicemos en concreto las relaciones existentes entre los volúmenes, radios, presiones, masas y superficies en estos dos cuerpos. Una comparación semejante implica la utilización de algunos conocimientos matemáticos, pero la sencillez de las relaciones que se establecen entre los diferentes parámetros matemáticos subraya la simplicidad de la forma por medio de la cual la tensión superficial produce distintas configuraciones geométricas.

Cuando la burbuja esférica se convierte en una semiesfera al caer sobre una lámina de vidrio, la cantidad de aire que encierra ni



aumenta ni disminuye. Es decir, que el volumen de la esfera original es igual al de la semiesfera:

$$\frac{4}{3} \pi r_E^3 = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi r_S^3 \right)$$

Donde  $r_E$  y  $r_S$  son, respectivamente, los radios de la esfera y de la semiesfera. La fórmula se reduce a:

$$r_E = \left( \frac{1}{2} \right)^{1/3} r_S$$

que establece que el radio de la esfera es el 79 % [ $100 \times (1/2)^{1/3}$ ] del de la semiesfera.

A continuación necesitamos saber que la presión existente en una pompa de jabón es inversamente proporcional al radio, lo que significa que la presión es mayor en una burbuja pequeña que en una grande. Reflexionemos sobre esta afirmación por unos momentos. ¿No resulta errónea en apariencia? Todo el mundo sabe, por ejemplo, que si se introduce aire en un neumático de un automóvil, el mismo se expande y la presión se incrementa. Por el contrario, cuando introducimos aire en una burbuja, ésta se dilata y la presión decrece. ¿Pueden ser correctas ambas afirmaciones?

Pues en efecto, las dos son ciertas. Los neumáticos se comportan de una forma muy diferente a como lo hacen las burbujas. Los primeros no se expanden tanto, ya que el caucho no es tan elástico como la película de jabón y permite que las presiones ejercidas sobre él aumenten. La película de jabón, por el contrario, nunca presenta una presión superior a 0,06 g/cm en sus paredes. Ésta es la misma para paredes finas o gruesas y para burbujas grandes o pequeñas. Una burbuja simplemente se expande hasta que la presión ejercida por el aire encerrado dentro de ella equilibre a la tensión de la pared, igual, como hemos dicho, a 0,06 g/cm.

El hecho de que las burbujas grandes tengan una presión baja se aprecia mejor si experimentamos con una sección de película. La figura 156a muestra que cuando la presión en ambas caras de la película es idéntica, ésta adopta una forma recta. La figura 156b re-

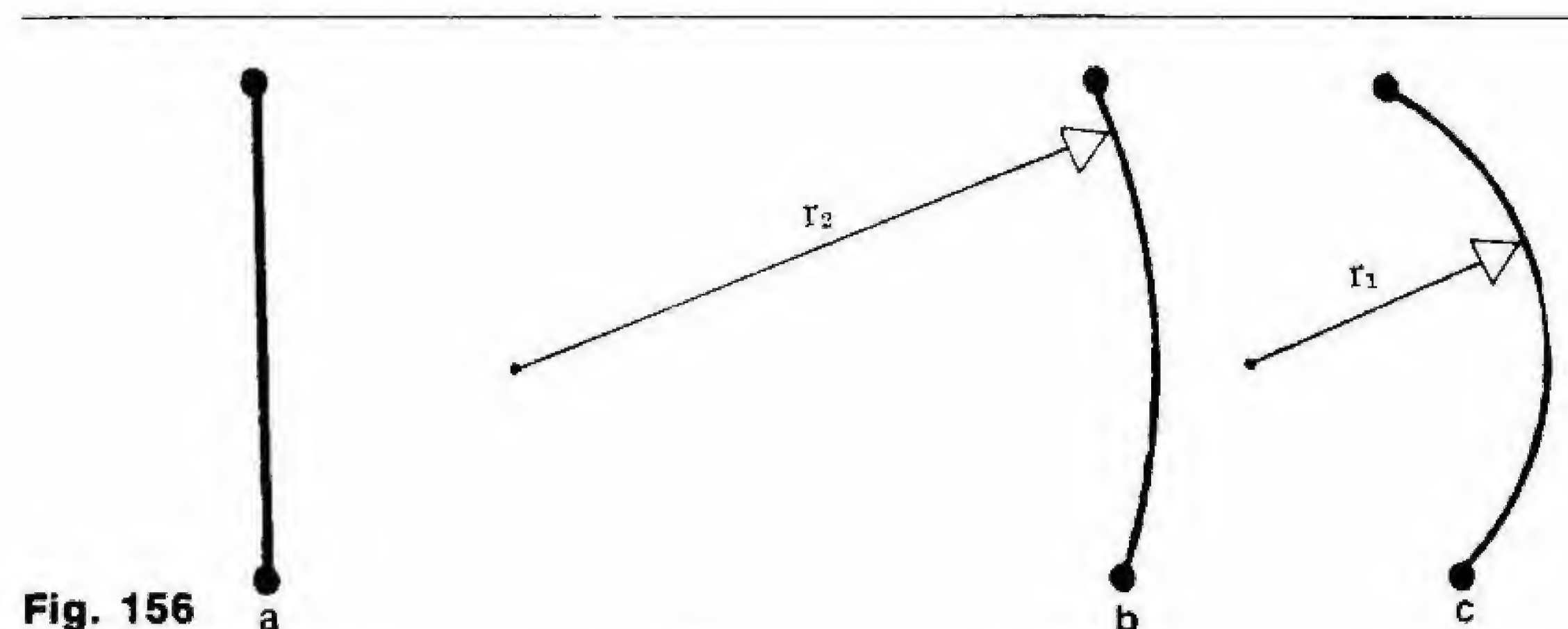


Fig. 156

vela que al soplar con una presión baja sobre la película recta, se desvía ligeramente y presenta un radio de curvatura  $r_2$ . En la figura 156c vemos que soplando a mayor presión curvamos la película aún más, de forma que ahora el radio de curvatura es  $r_1$ . Las burbujas adoptan una determinada forma del mismo modo que hemos visto en nuestro pequeño experimento, y así, cuanto menor es la burbuja (y por tanto el radio de curvatura), mayor es la presión interna. Ya hemos apuntado que la relación entre los radios de la esfera y de la semiesfera es  $(1/2)^{1/3}$ , es decir:

$$\frac{r_E}{r_S} = (1/2)^{1/3}$$

Dado que la presión es inversamente proporcional al radio, sabemos ahora que:

$$\frac{P_S}{P_E} = (1/2)^{1/3}$$

Donde  $P_S$  es la presión de la semiesfera y  $P_E$  la de la esfera.

Podemos también calcular la relación existente entre  $A_S$ , el área de la película en la semiesfera, y  $A_E$ , el área de la película de la esfera. Hallamos que:

$$\frac{A_S}{A_E} = \frac{2\pi r_S^2}{4\pi r_E^2}$$



y dado que

$$\frac{A_S}{A_E} = \frac{r_E^2}{2^{1/3}} \times \frac{1}{r_E^2}$$

tenemos:

$$\frac{A_S}{A_E} = (1/2)^{1/3}$$

Por tanto, el área de la película en la semiesfera es menor que la de la esfera en la misma proporción en que la presión de la primera es menor que la de la segunda.

El resumen de todo este malabarismo de símbolos viene dado por la relación siguiente:

$$\frac{r_E}{r_S} = \frac{P_S}{P_E} = \frac{A_S}{A_E} = \left( \frac{1}{2} \right)^{1/3}$$

En ella se muestran las relaciones existentes entre los radios, las presiones y las áreas. Incluso aquellos para quienes las matemáticas resulten algo arduo y complejo han de disfrutar obteniendo un resultado semejante, ya que el lenguaje matemático describe y expresa mucho mejor que las palabras las relaciones inequívocas existentes entre la geometría y las fuerzas en la transformación de una burbuja.

Veamos algunas otras transformaciones. Si se apoya parte de la burbuja semiesférica sobre un plano inclinado, ascenderá por dicho plano arrastrando tras ella el resto de la burbuja hasta que el centro de curvatura se sitúe en el punto de unión entre el plano inclinado y la superficie horizontal. La figura 157 muestra secciones transversales de burbujas que forman progresivamente ángulos menores. Todas las que aparecen en la figura tienen el mismo volumen y sus secciones se han dibujado a escala. Descubrimos que sus radios se van haciendo mayores a medida que los ángulos se reducen. Al mismo tiempo, las superficies de las burbujas y sus presiones disminuyen.

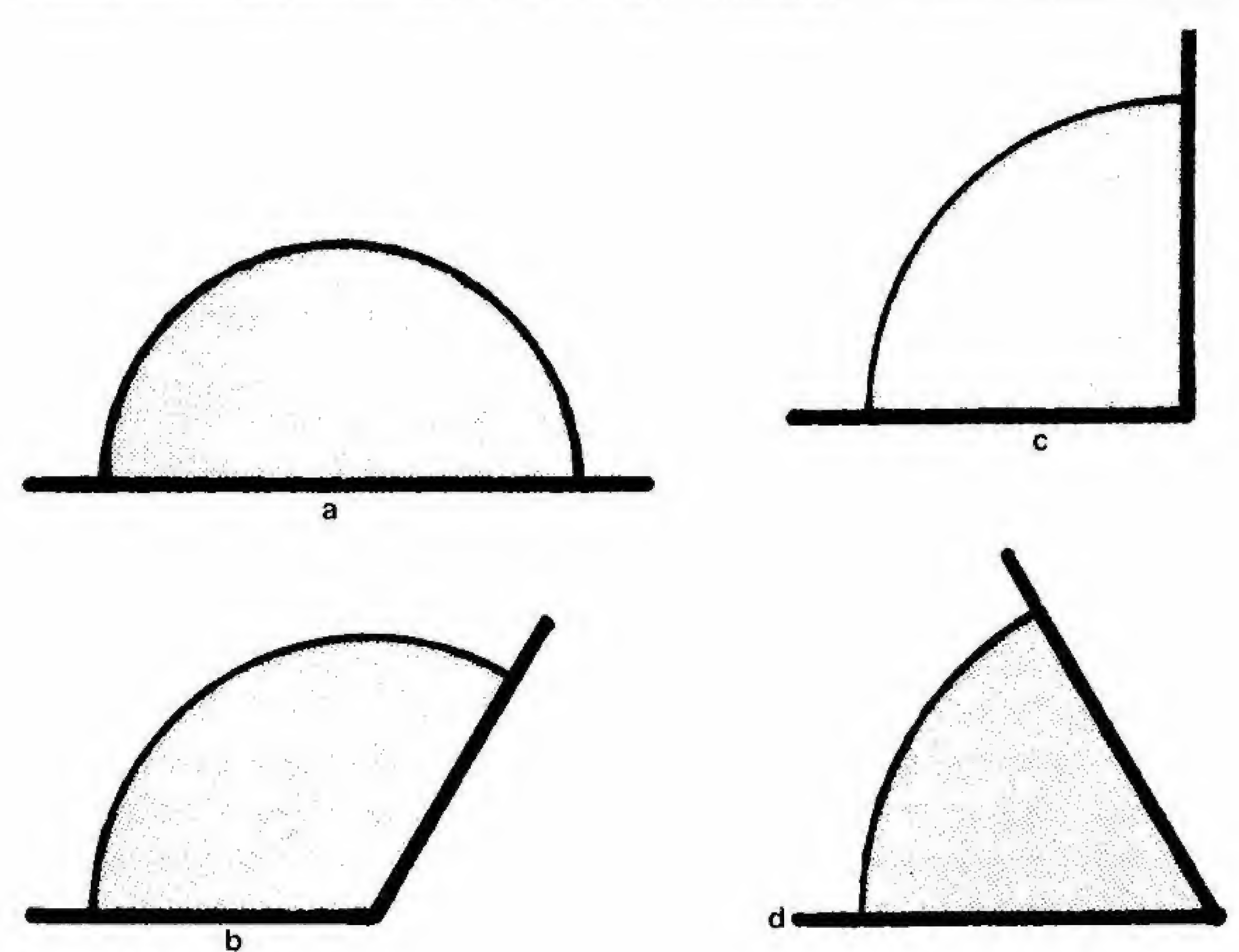


Fig. 157

Cuando se compara una semiesfera con su esfera madre, hemos visto que los radios, presiones y superficies se relacionan según  $(1/2)^{1/3}$ . Cuando comparamos  $1/3$  de esfera, como la de la figura 157b, con esta esfera, las relaciones son de  $(1/3)^{1/3}$ , mientras que en el caso de un cuadrante o la sexta parte de la esfera (figura 157c y d, respectivamente) son de  $(1/4)^{1/3}$  y de  $(1/6)^{1/3}$ . Por tanto, los radios, las presiones y las áreas se relacionan entre sí de una forma muy simple: como la raíz cúbica de la fracción de esfera de que se trate.

La fuerza que se halla detrás de los cambios regulares que tienen lugar en los radios, presiones y áreas sigue siendo la actividad de las partículas, que son absorbidas o expulsadas del interior de la película. Lo más notable es que tales transformaciones, realizadas de acuerdo a un orden matemático, provienen de las agregaciones de partículas que se encuentran en un estado de agitación. Pero da-



do que ninguna partícula permanece sobre las superficies de la película, éstas se reducen y la curvatura también. Esta disminución del grado de curvatura (que supone una auténtica «rectificación») determina un alargamiento del radio y una reducción correspondiente de la presión. Así, la configuración del cuadro total viene determinada por las interacciones de las partes más pequeñas del mismo. La forma nace del informe juego de fuerzas a que están sometidas las moléculas.

Si ahora colocamos dos burbujas semiesféricas sobre una superficie de vidrio con algo de agua, ambas se juntarán y simultáneamente formarán un tabique de separación entre ellas. La figura 158 muestra, en sección transversal, cómo se origina dicho tabique. Vemos que las películas de las dos semiesferas en la ilustración superior no se hallan en equilibrio entre sí: las dos se tocan tangencialmente en lugar de constituir una unión de  $120^\circ$ . Pero observemos lo que ocurre en dicho punto de contacto. Cuando las dos películas con sus cuatro superficies se encuentran (recordemos que cada película tiene una superficie interna y otra externa), las moléculas pasan a formar una única película con dos superficies y dan lugar a un tabique de separación. Las dos películas se transforman así en una sola, las cuatro superficies en dos y, a medida que crece la película, las otras se acercan para unirse en un ángulo de  $120^\circ$ .

Incluso con un tabique de separación, el área de la película en la burbuja doble es menor que la de las dos semiesferas separadas.

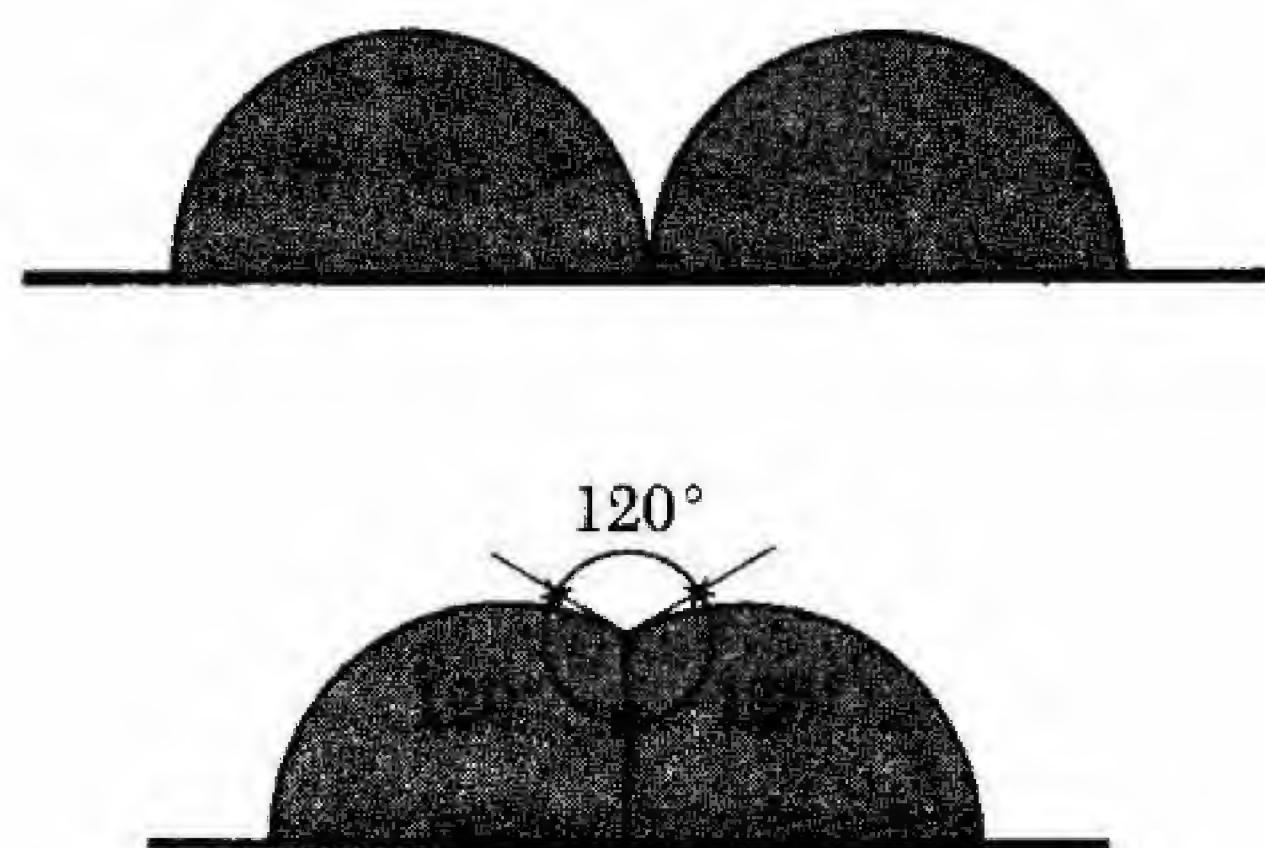


Fig. 158

Si tal reducción del área no se produce, las burbujas no llegan a coalescer. Además del área, también es menor en la burbuja doble la presión y, lo que es obvio, el radio de curvatura se alarga. Un pequeño cálculo revela cómo pueden compararse las superficies, presiones y radios en la semiesfera aislada y en el lóbulo de la doble burbuja. Hallamos así que:

$$\frac{r_S}{r_D} = \frac{P_D}{P_S} = \frac{A_D}{A_S} = \left(\frac{27}{32}\right)^{1/3}$$

Donde  $r_S$ ,  $P_S$  y  $A_S$  son el radio, la presión y el área de la semiesfera, y  $r_D$ ,  $P_D$  y  $A_D$  son el radio, la presión y el área de un lóbulo de la doble burbuja. Si incluimos el área del tabique de separación, obtendremos la fracción  $27/32$  de una forma totalmente natural.

El diagrama superior de la figura 159 muestra un esquema de la doble burbuja. Dado que el radio de los lóbulos es igual, las presiones son idénticas y el tabique de separación que se forma es recto. La figura es exacta a la fotografía de la ilustración 160. Sin embargo, si dos burbujas distintas se unen, el tabique de separación se curva hacia la burbuja mayor, cuya presión es más baja. En los tres diagramas inferiores de la figura 159 observamos que la deformación del tabique aumenta a medida que la desigualdad entre los lóbulos crece.

La deformación del tabique tiene lugar de una forma muy lógica. Al igual que la mayor parte de los conocimientos que poseemos acerca de las pompas y burbujas de jabón, las leyes relacionadas con esta deformación fueron descubiertas por el físico belga J. A. F. Plateau, cuya gran obra, *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides*, se publicó 30 años después de que el científico se volviera ciego, de forma que durante todos esos años «vio» sus experimentos sólo a través de los ojos de sus colaboradores.

La figura 159, adaptada de la obra de Plateau, muestra un hecho notable acerca de la geometría de los grupos de burbujas. En cada uno de los diagramas aparecen marcados dos ángulos de  $60^\circ$  mediante pequeños triángulos negros. Su existencia es necesaria debido a que las películas se encuentran en un ángulo de  $120^\circ$ .



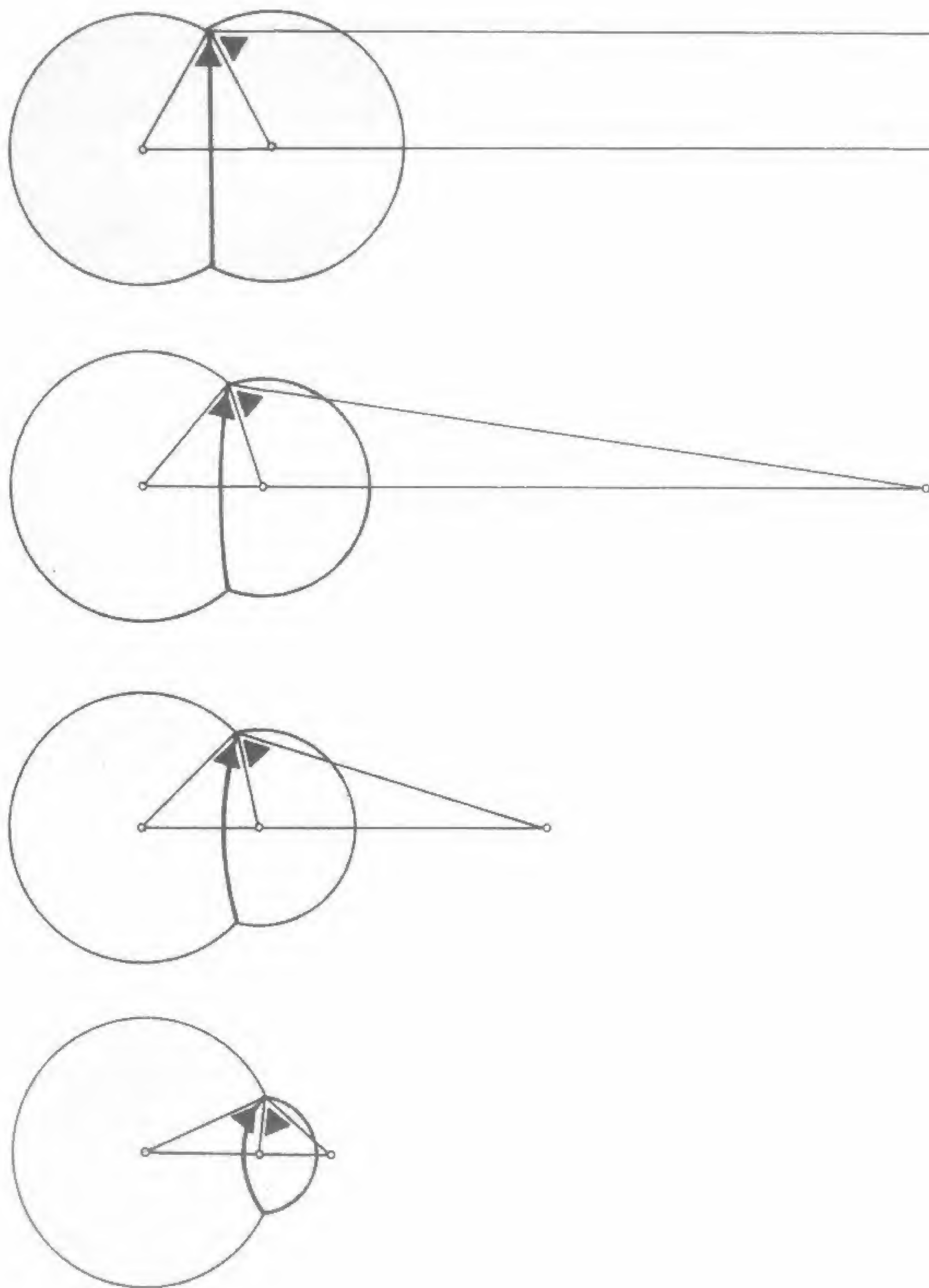


Fig. 159

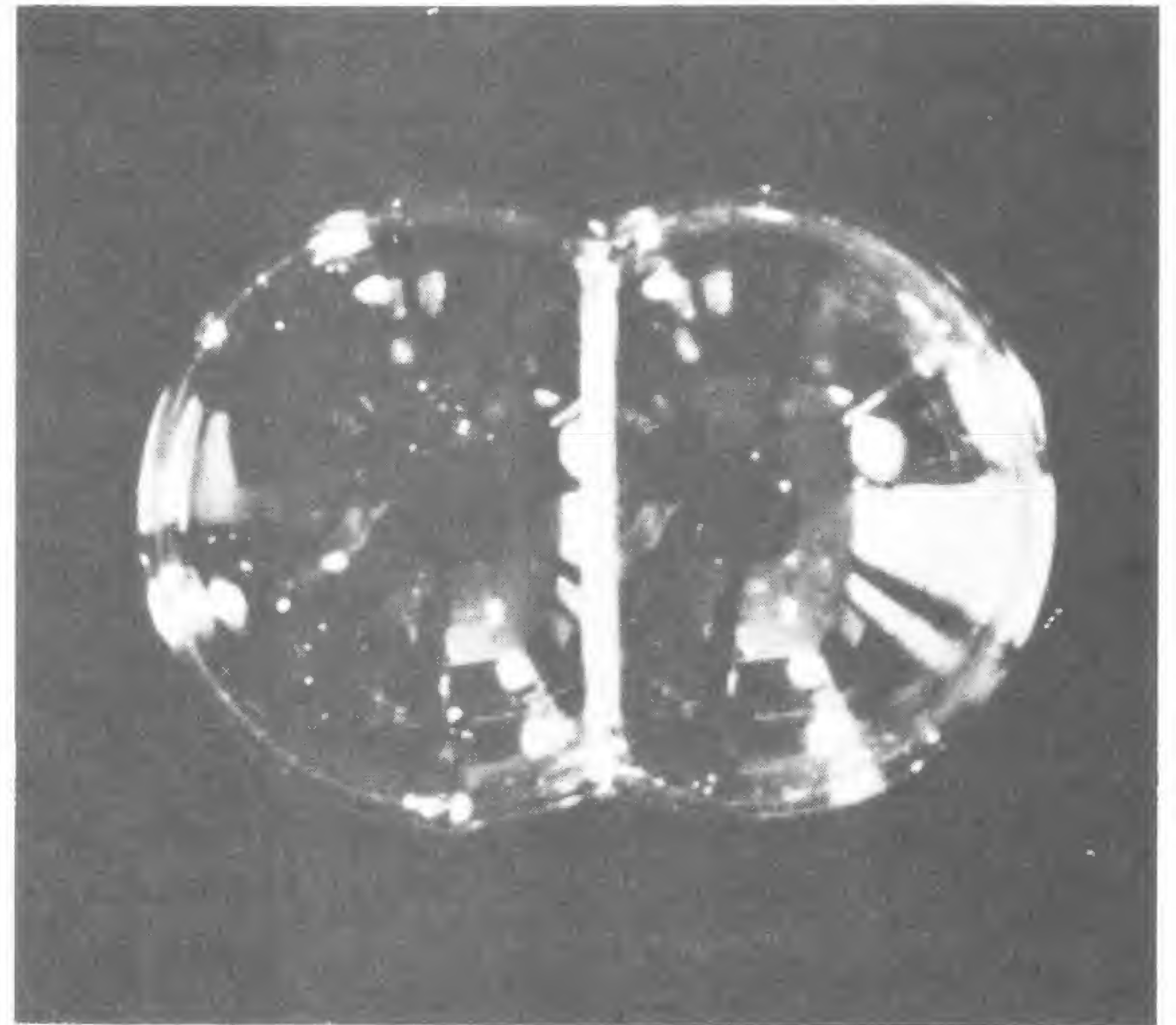


Fig. 160

Observemos las localizaciones de estos ángulos: una señala la posición de la triple unión en relación con los centros de curvatura de los lóbulos, y la otra indica la de la triple unión con respecto al centro de curvatura del lóbulo menor y al del tabique de separación. De la figura se desprende, como podemos ver, que los tres centros se disponen sobre la misma recta. Conociendo estos hechos, estamos en condiciones de establecer fácilmente las relaciones existentes entre los distintos radios. Así, podemos determinar, por ejemplo, que el cuadrado de la distancia entre los centros de las burbujas es igual a la suma de los cuadrados de los radios menos el producto de ambos. O sea:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2$$



Para demostrar esta relación, sólo necesitamos saber un poco de geometría plana. También podemos comprobar que el radio de curvatura de un tabique de separación es igual al producto de los radios de los lóbulos dividido por su diferencia, es decir:

$$r_T = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

O, de forma aún mucho más sencilla:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_T}$$

Donde  $r_T$  es el radio de curvatura del tabique.

De este modo vemos que tanto algebraica como geométrica-mente nada queda al azar en la unión de las burbujas. Cada unión, cada curvatura y la longitud de cada tabique vienen determinados por los movimientos aleatorios de las moléculas al abrirse paso hacia los centros de las películas.

Plateau descubrió que las relaciones geométricas en la burbuja doble se mantienen también en el caso de las agrupaciones de burbujas. En la figura 161 aparece una triple burbuja en la que se han señalado nuevamente los ángulos de  $60^\circ$  mediante triángulos oscuros. Vemos otra vez que el radio de curvatura del tabique de separación entre dos lóbulos cualesquiera se sitúa sobre la recta que atraviesa los centros de dichos lóbulos. Además, los tres radios de curvatura de los tres tabiques se disponen a su vez sobre una misma recta. Como ocurría en la doble burbuja, podemos determinar las distancias entre los centros de los lóbulos y observar que las presiones más altas de los lóbulos pequeños motivan que los tabiques se curven hacia el lóbulo mayor. Calculamos así que el área total de la película del grupo de burbujas es la mínima necesaria para contener y separar las tres cantidades distintas de aire. Todos los elementos se hallan completamente determinados. Podemos comprobar las distintas relaciones entre las curvaturas y las dimensiones de las burbujas por medios matemáticos o, lo que es más sencillo, colocar un grupo real de burbujas sobre una placa de vidrio y llevarla sobre

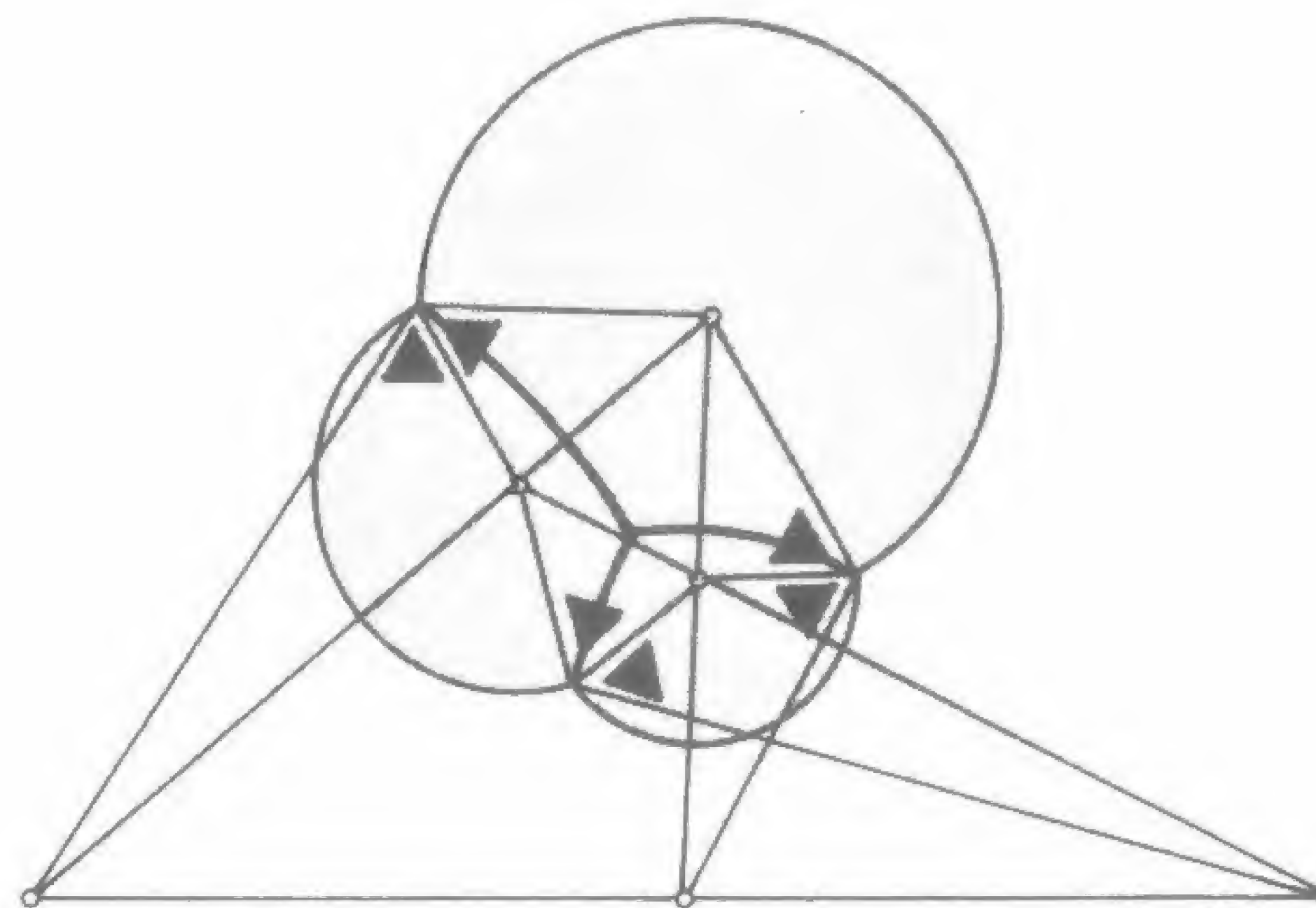


Fig. 161



Fig. 162



nuestro diagrama: observaremos que las dos figuras coinciden exactamente en todos sus detalles. La figura 162 muestra un grupo de tres lóbulos reales, similares a los de la figura anterior.

También en grupos mayores las descripciones de carácter algebraico acompañan a las configuraciones geométricas. Así como la celdilla media de la espuma se aproxima a una forma regular y definible (aunque una determinada celdilla puede adoptar una gran variedad de formas), la acción media que ejercen las moléculas produce igualmente formas bien definidas (aun cuando la trayectoria de una molécula particular es impredecible). La acción de todas las moléculas en su conjunto compensa la indeterminación de cada una de ellas y produce tanto la belleza morfológica como la matemática.

## 8. AGRUPAMIENTO Y FRAGMENTACIÓN

Hemos visto ya que las uniones de  $120^\circ$  se producen cuando los límites o interfases se minimizan, como ocurre en el caso de la concha de la tortuga, en la espuma, o en los gránulos de cristal. El mismo modelo se forma cuando conjuntos de objetos similares se agrupan de la manera más compacta posible y cuando un material homogéneo se divide y da lugar a dos fragmentos independientes.

### Agrupamiento compacto

Los objetos esféricos, como las canicas o las bolas de billar, pueden agruparse sobre una superficie plana para formar diferentes ordenaciones regulares. En concreto, pueden unirse en grupos cuadrados o triangulares, como se ve en la figura 163. Las ordenaciones cuadradas de las figuras 163a y c representan la colocación de distintas botellas en un anaquel o la de una serie de huevos en una caja de cartón. La disposición triangular o compacta de c representa el agrupamiento de bolas de billar como las que aparecen en la figura 164.

Las bolas que se disponen en un cuadrado se agrupan de manera menos compacta que las de la figura triangular. Comprobamos esto si mentalmente hacemos que una fila del cuadrado se desplace una distancia de medio diámetro hacia la derecha o hacia la izquierda. Las bolas desplazadas se deslizan hacia los espacios existentes entre las bolas de las filas contiguas. Ordenando todas las filas de esta manera, resulta un agrupamiento más compacto, el mismo que



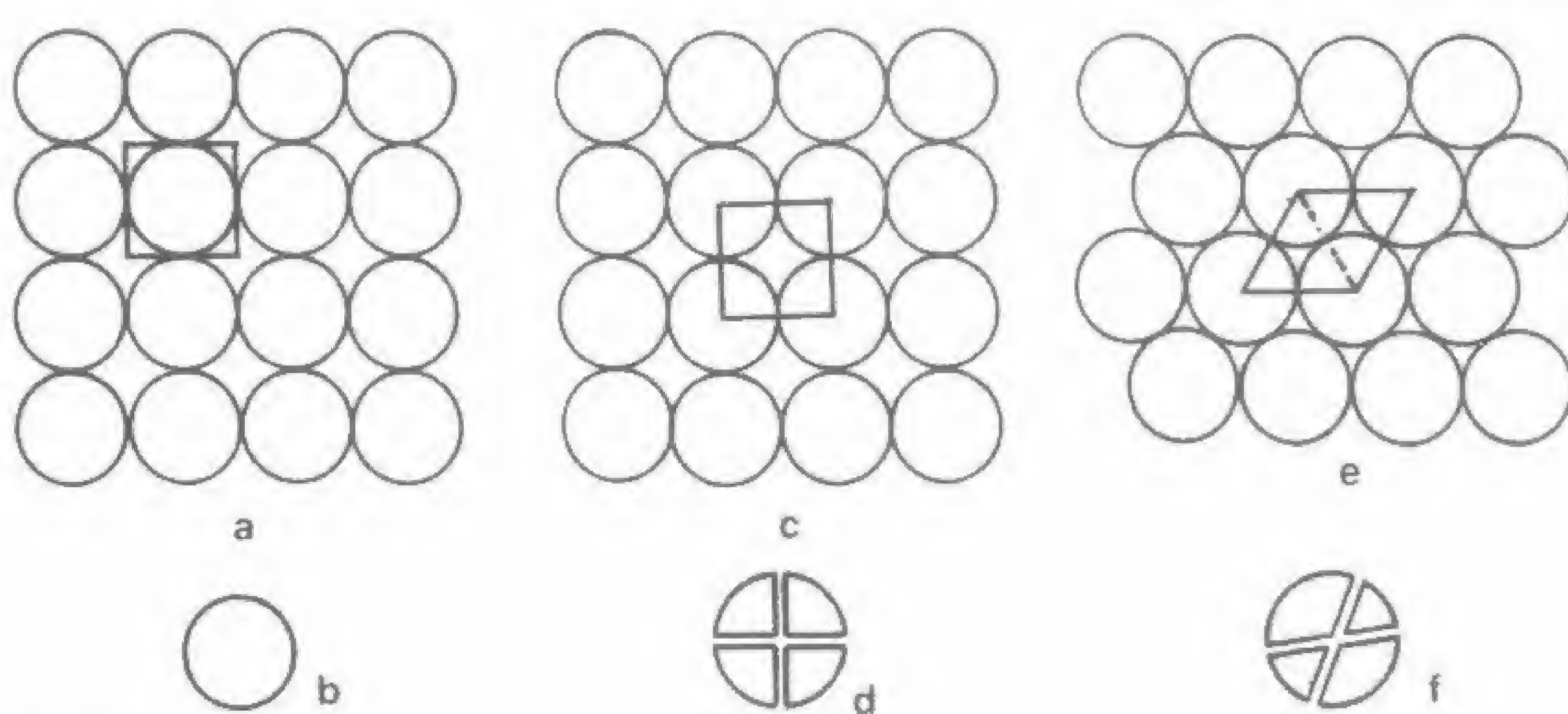


Fig. 163

presentan las moléculas de un cristal o los elementos de una planta cuando producen una filotaxis espiral.

Podemos comparar el grado de compacidad de las ordenaciones de la figura 163 contrastando los tamaños de las cuadrículas que se requieren para contener exactamente una esfera. Ya que todas las esferas tienen idéntico tamaño, podríamos pensar que, independientemente de cómo se ordenara cada una, éstas encajarían en

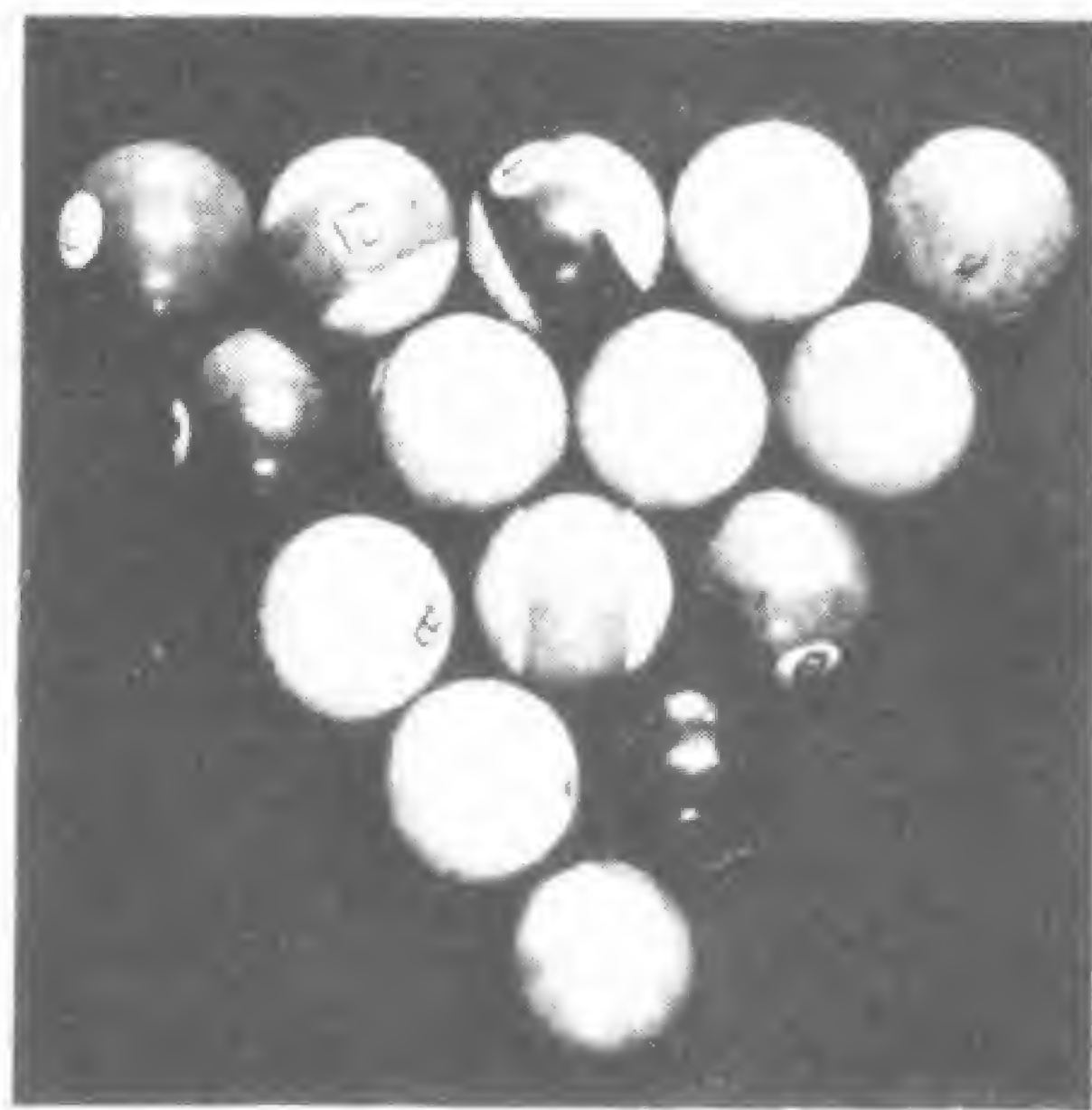


Fig. 164

las mismas cuadrículas. Pero esto no sucede así en absoluto, sobre todo si se respeta la regla de que las cuadrículas deben agruparse sin dejar ningún espacio entre ellas.

Estas cuadrículas que hemos utilizado vienen a ser lo que los cristalógrafos llaman mallas o unidades fundamentales, y la unidad fundamental para el cuadrado resulta ser un cubo, cuya sección transversal es lo que representa la cuadrícula de la figura 163a. A este cubo pueden unírsele otros de forma que cada uno contenga exactamente una esfera y todos los cubos juntos cubran la totalidad del plano, sin dejar ningún espacio entre ellos. Esto es evidente en el caso de la figura 163a, pero veamos si ocurre lo mismo en c. En esta última se ha dibujado la misma cuadrícula, pero su localización es distinta y se dispone abarcando cuatro cuadrantes de diferentes esferas. Estos cuadrantes pueden reagruparse como muestra la figura 163d a fin de formar una esfera completa, y así mantenemos la definición de la unidad fundamental: la cuadrícula, proyectada tridimensionalmente para constituir un cubo, sigue conteniendo una esfera.

La unidad fundamental para una ordenación triangular o compacta es un paralelepípedo, cuya sección transversal (un paralelogramo en el que se ha trazado una diagonal con puntos para mostrar que está compuesto por dos triángulos) se ve en la figura 163e. De nuevo observamos que pueden reagruparse cuatro porciones de cuatro esferas distintas para formar una esfera completa, y que es posible unir el paralelepípedo a otros para contener todas las esferas que aparecen en el dibujo.

Interesa destacar que el volumen de la unidad fundamental en la ordenación cuadrada es  $8r^3$ , donde  $r$  es el radio de la esfera, mientras que el volumen de la unidad fundamental en la ordenación compacta es sólo  $4\sqrt{3}r^3$ . Por lo tanto, las esferas en la ordenación compacta encajan en un espacio que es el 87 % [ $100 \times (4\sqrt{3}/8)$ ] del espacio necesario para alojar las esferas en la ordenación cuadrada. Así pues, hemos descrito el mayor grado de compacidad posible de una ordenación dada mediante un número concreto.

Si formamos grupos reales con canicas, veremos que resulta imposible agruparlas en una ordenación cúbica: nuestras canicas persisten en rodar hacia los huecos dejados por sus vecinas, y una y



otra vez tienden a juntarse de la forma más compacta posible. Puede describirse la tendencia de las canicas a rodar hacia los huecos disponibles en términos de energía. De la misma manera que decimos que las gotas de lluvia poseen una menor energía potencial cuando se encuentran en los valles que cuando se sitúan en la cima de las montañas, podemos afirmar que las canicas tienen una energía potencial más baja una vez han ocupado los espacios vacíos que situadas en lo alto de las otras canicas. Por consiguiente, siempre que puedan moverse libremente, lo harán adoptando un modelo de mínima energía.

Y las uniones triples ¿cómo se forman? Observemos la forma en que grupos de tres canicas rodean en la ordenación compacta cada intersticio (fig. 163e). Si tuvieran paredes blandas o deformables, como los globos, las bolitas de arcilla o las células vegetales, y todas se expandieran simultáneamente (o la ordenación entera experimentara un alargamiento), cada una de las tres canicas ocuparía  $1/3$  del intersticio y las tres se encontrarían en un único punto. Por tanto, la expansión de unidades agrupadas de modo compacto produce automáticamente un sistema de uniones triples.

Podemos ver cómo una expansión similar de unidades en la ordenación cuadrada origina uniones cuádruples. Pero cualquier deslizamiento o desplazamiento de tales unidades para adoptar una configuración de mínima energía determina la formación de vértices de tercer orden.

En la figura 165 observamos la deformación de unidades y el desarrollo de uniones triples en los granos de maíz (a), en el panículo de la *Zamia skinneri* (b) (fotografiada en el Fairchild Tropical Gardens de Miami, Florida), en un grupo de percebes (c), en una masa de levadura (d), en secciones de cebolla (e), en los pólipos coralinos (f) y en las celdillas de un avispero (g). En este último caso, todas las celdillas ejercen presiones sobre sus vecinas y a su vez son comprimidas por ellas, de manera que se agrupan de tres en tres de forma tan compacta como sea posible.

Resulta interesante observar en qué medida las uniones en la sección de cebolla se asemejan a los tabiques de separación que se establecen en la espuma de burbujas. Por ejemplo, el lóbulo más pequeño en la doble yema, situado en la parte izquierda de la figura

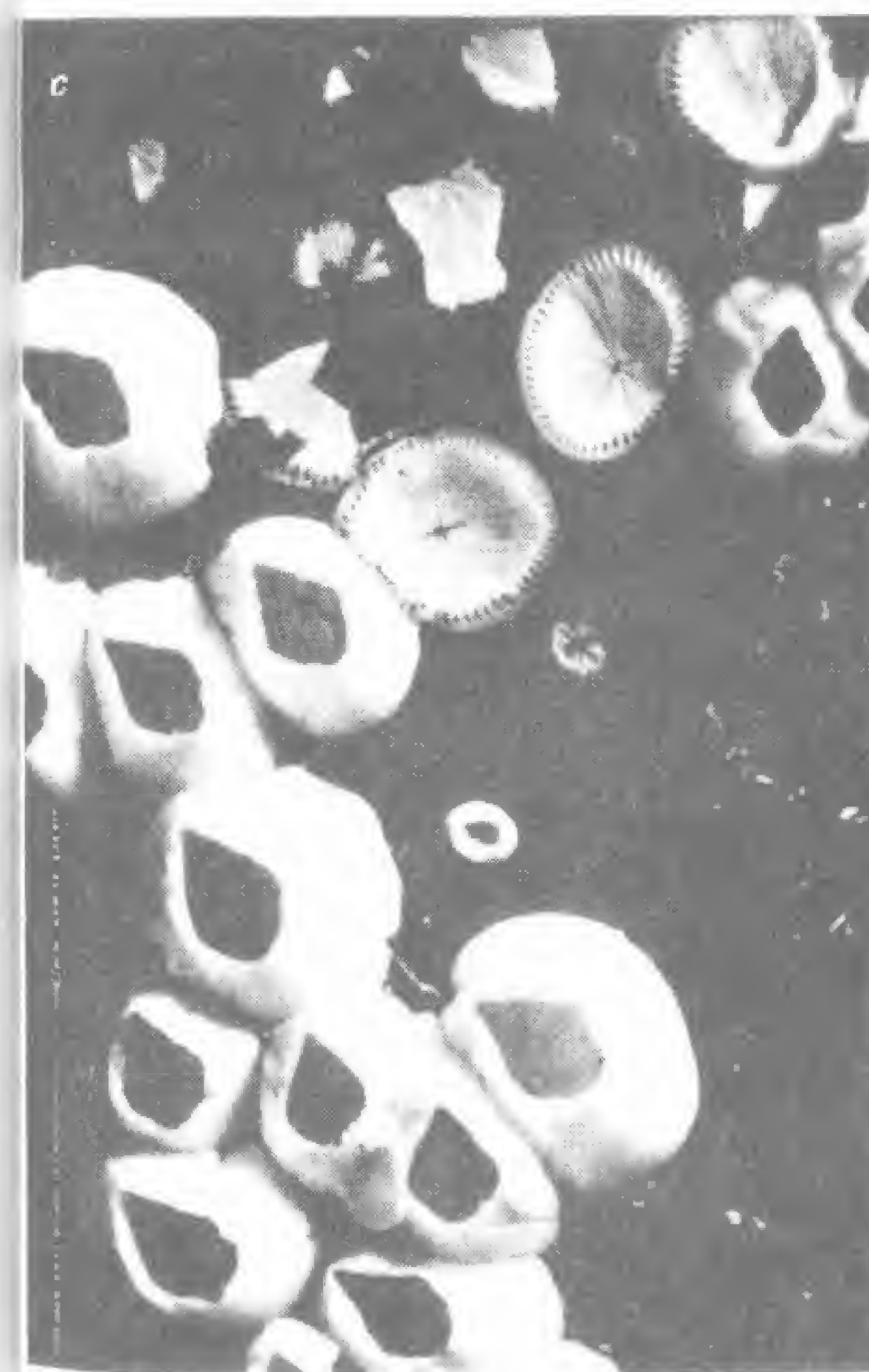
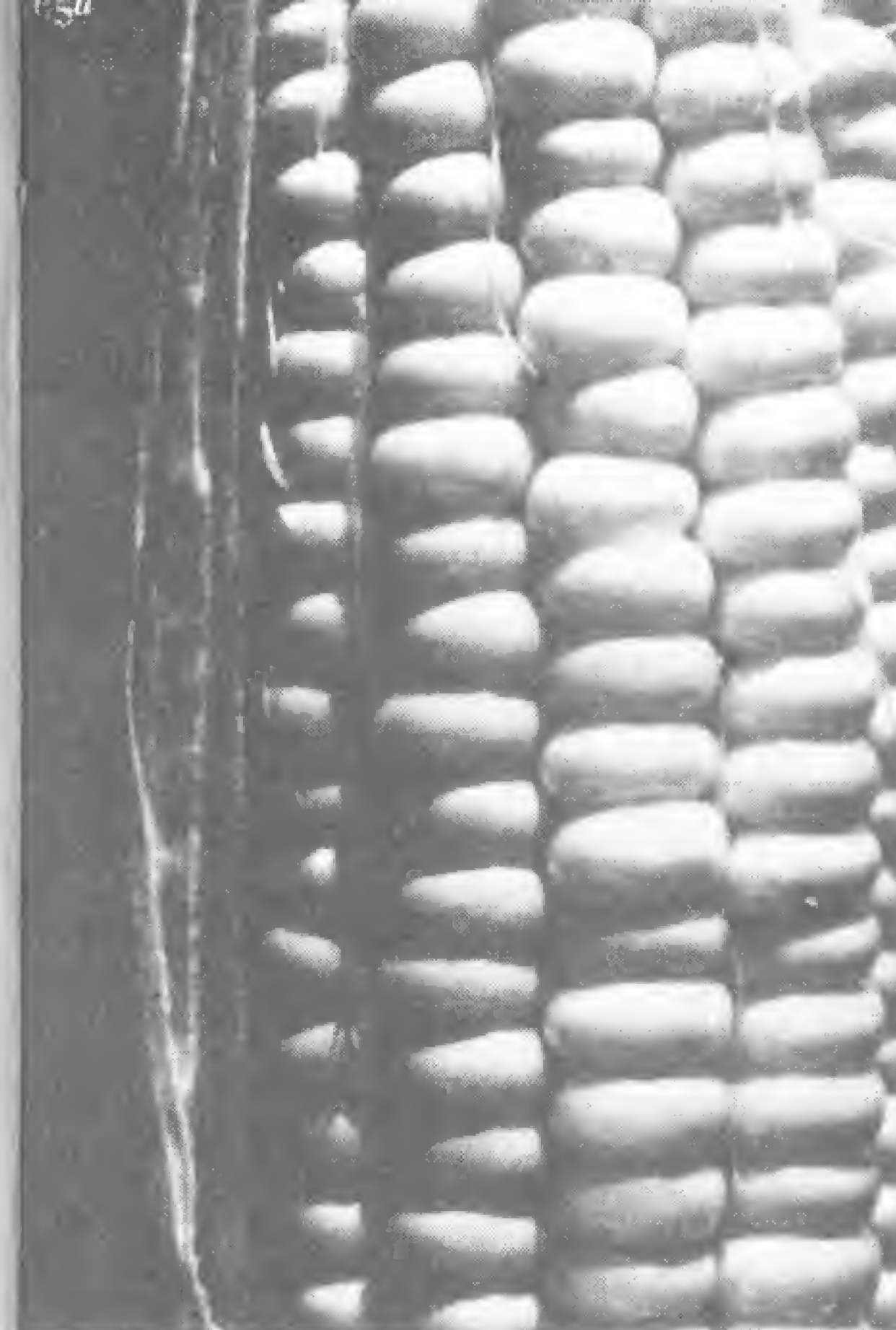
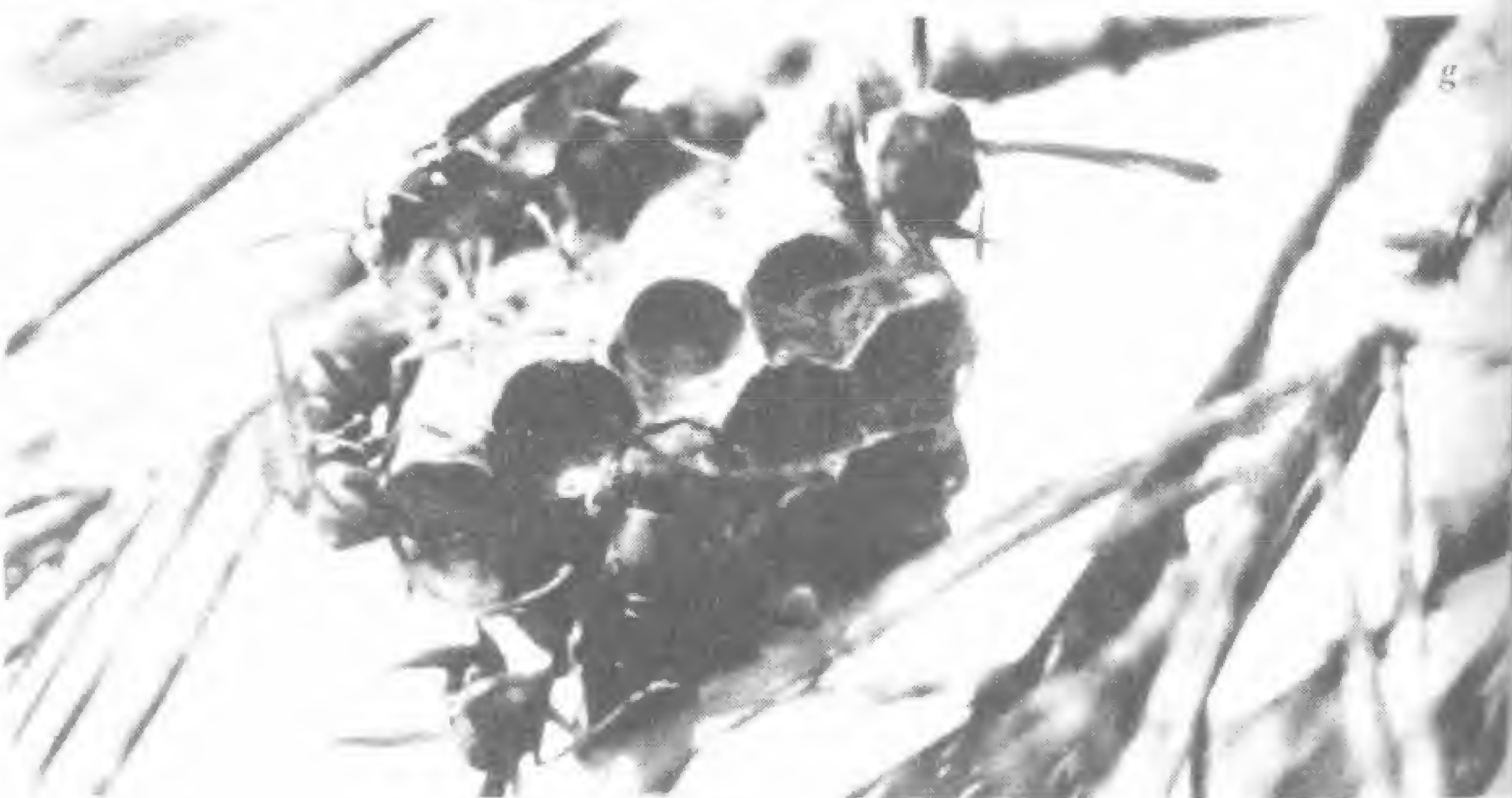


Fig. 165 ▶





165e. ejerce presión sobre el lóbulo mayor de forma similar a como lo hace el lóbulo menor en una doble burbuja.

En un nivel tridimensional, las formas que se originan a raíz de un agrupamiento compacto se parecen también a aquellas otras modeladas por una fuerza completamente diferente, la de la tensión superficial. Si unimos dos globos cogiéndolos del centro y retorciéndolos el uno alrededor del otro, obtendremos de forma espontánea un tetraedro tridimensional, como muestra la figura 166 (la misma unión establecida por las películas de jabón en la estructura tetraédrica de la figura 154a).



Fig. 166

En la fotografía de los globos, vemos tres de los brazos formados, detrás de los cuales se halla el cuarto. La unión de los globos no se produce debido a que sus superficies fluyen a la vez para constituir un sistema de separaciones con un mínimo de material. En vez de esto, la mitad de cada globo ejerce una presión igual sobre las otras y todas ellas se disponen formando entre sí ángulos de  $109,5^\circ$ . De manera similar, observe el lector cómo se parecen las piezas de gomaespuma de la figura 167 a las burbujas de la espuma. De nuevo vemos que el agrupamiento compacto y la tensión superficial originan formas similares.





Fig. 167

### Fragmentación

Consideremos ahora un fenómeno completamente distinto: la fragmentación. Observemos la roca de la figura 168a, que se ha fragmentado en tres trozos. Suponiendo que la roca sea homogénea (es decir, que no se partió por donde lo hizo debido a la fragilidad de ciertas partes de la misma), podemos imaginar que, a medida que las fuerzas de tensión actuaban, los enlaces entre las molé-



Fig. 168

culas constituyentes de la roca se alargarían como si fueran bandas elásticas tendiendo continuamente a equilibrar dichas fuerzas y que, por último, cuando la tensión alcanzó un grado muy alto, la roca saltó en tres pedazos. En el caso de un material elástico, como la propia roca, la fractura se produce de repente y da lugar a uniones de  $120^\circ$ . La figura 168b muestra fragmentaciones similares en el barro.

Comparemos este tipo de fragmentación con la de un material



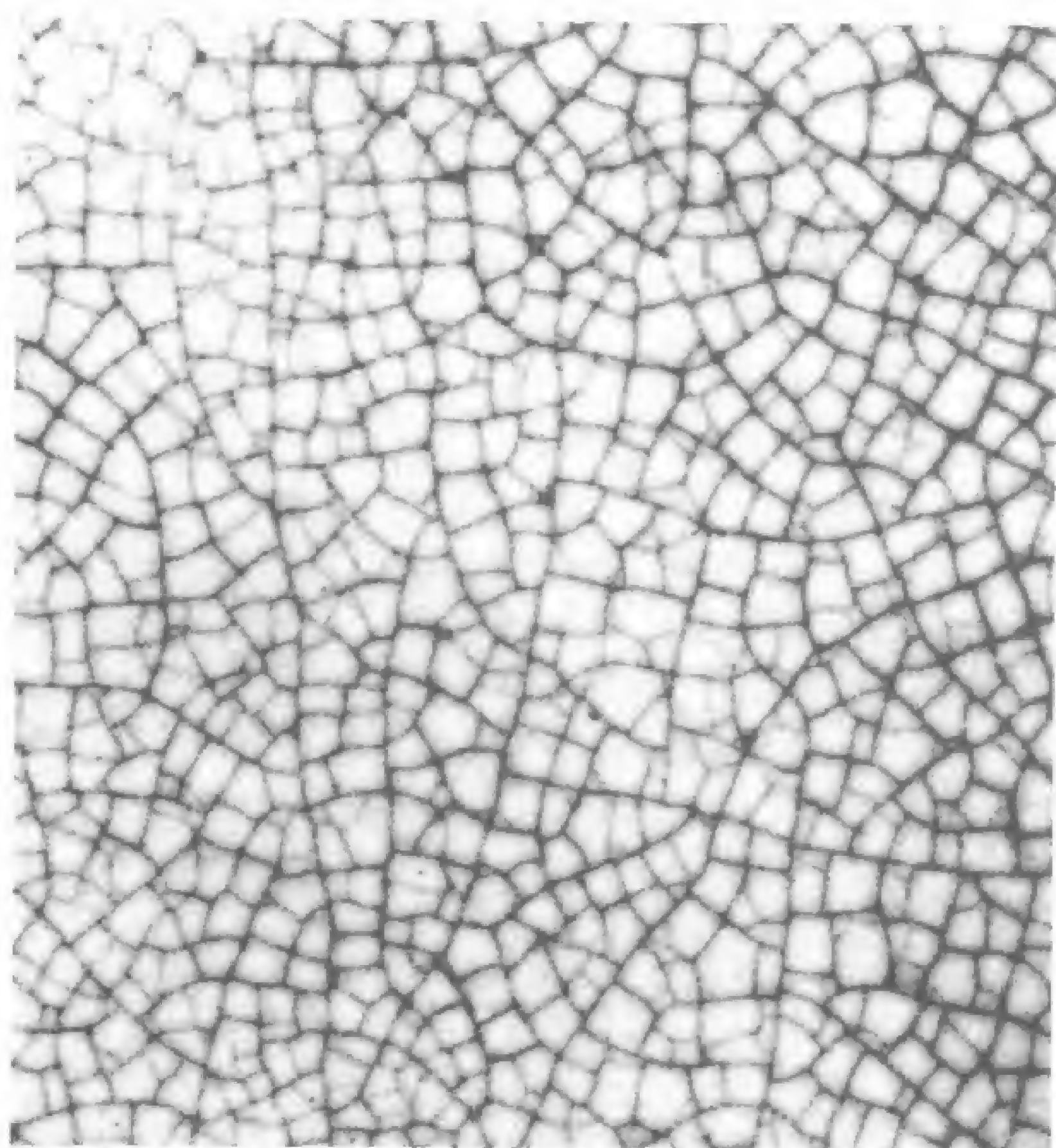


Fig. 169

no elástico, como puede ser el vidriado de una pieza de cerámica (fig. 169). En dicho vidriado, los enlaces entre las moléculas no ceden ni se ajustan con respecto a las fuerzas de tensión. La ruptura tiene lugar allí donde se produce la tensión, primero en una sección y después en la otra. Observando las longitudes de las hendiduras y comprobando cuáles pasan a través de las otras y cuáles quedan interrumpidas, podemos determinar en gran medida el orden en que han tenido lugar las fisuras.

Este modelo secuencial de fragmentación se caracteriza porque los puntos de unión forman ángulos rectos. La explicación de este hecho es muy simple: debido a que las fragmentaciones descargan toda la tensión en una dirección dada (en aquella que es paralela a ellas), las hendiduras que originan sólo pueden unirse a otras que discurren en dirección opuesta (perpendicularmente).

Un examen atento de la fotografía nos muestra que en la super-

ficie vidriada también se producen algunas uniones de  $120^\circ$ , que por lo general éstas se forman en aquellas partes que han sido previamente aisladas tras experimentar fragmentaciones por todos sus lados. Dicho aislamiento libera a la porción que lo sufre, de forma que sus tensiones pueden dar lugar a ajustes elásticos y las hendiduras se unen en grupos de tres. Por consiguiente, la regla establece que la fragmentación en los materiales elásticos se produce repentinamente, uniéndose las hendiduras en ángulos de  $120^\circ$ , mientras que en los materiales no elásticos tienen lugar secuencialmente y las hendiduras nuevas se unen a las viejas en ángulos de  $90^\circ$ .

Así pues, las películas y las fisuras que se producen a consecuencia de la fragmentación tienen muchas cosas en común. Las películas que son elásticas, como las de agua y jabón, se mueven una con relación a la otra para unirse con un ángulo de  $120^\circ$ , como ocurre con las fisuras; y las películas que no admiten la deformación de sus paredes se unen con ángulos de  $90^\circ$ , también como en el caso de las fisuras. El modelo global que forman las películas tiende a presentar la mínima energía o la exposición de superficie más reducida posible, lo que resulta asimismo válido para las fisuras de las fragmentaciones. Sin embargo, a modo de contraste, podemos afirmar que la película es el material que se halla entre los espacios vacíos y que está constituido por partículas que van hacia él, en tanto que una hendidura o fisura es el hueco existente entre dos superficies o masas de material y lo componen partículas que escapan del mismo. Resulta interesante destacar que aunque la película y la fisura se originan en virtud de mecanismos muy diferentes, con suma frecuencia se asemejan en sus características.

Consideremos a continuación algunos modelos de fragmentación más complejos.

La figura 170 muestra la fragmentación que presenta la corteza de los árboles. En la figura 170a vemos el tronco de una palma de Washington (*Washington robusta*) que se divide en fisuras longitudinales a medida que las capas internas se expanden. En la melaleuca de la figura 170b, la corteza literalmente «explota», mientras que en el roble de la figura 170c (*Quercus virginiana*) y el pino de la figura 170d, la corteza se escinde en celdillas o escamas. Las fuerzas que operan en el seno de la corteza de los árboles difieren según las es-





pecies, de manera que la expansión de aquélla da lugar a distintos modelos. Además de estas escisiones y fragmentaciones de la capa cortical ya existente, el crecimiento del árbol determina la acumulación de corteza nueva, lo que afecta asimismo al aspecto final. La Naturaleza rara vez se limita a sistemas sencillos que impliquen una única fuerza y sus formas representan por lo general el equilibrio de diversas fuerzas, la situación de compromiso entre distintas tendencias. Analizar los efectos de una sola fuerza es fácil, pero interpretar la interacción de dos o más de ellas resulta en muchos casos algo casi imposible. No obstante, la Naturaleza, ajena a nuestras dificultades analíticas, combina libremente tendencias contrapuestas para crear una gama completa de formas, modelos y diseños.

### Analogías geológicas

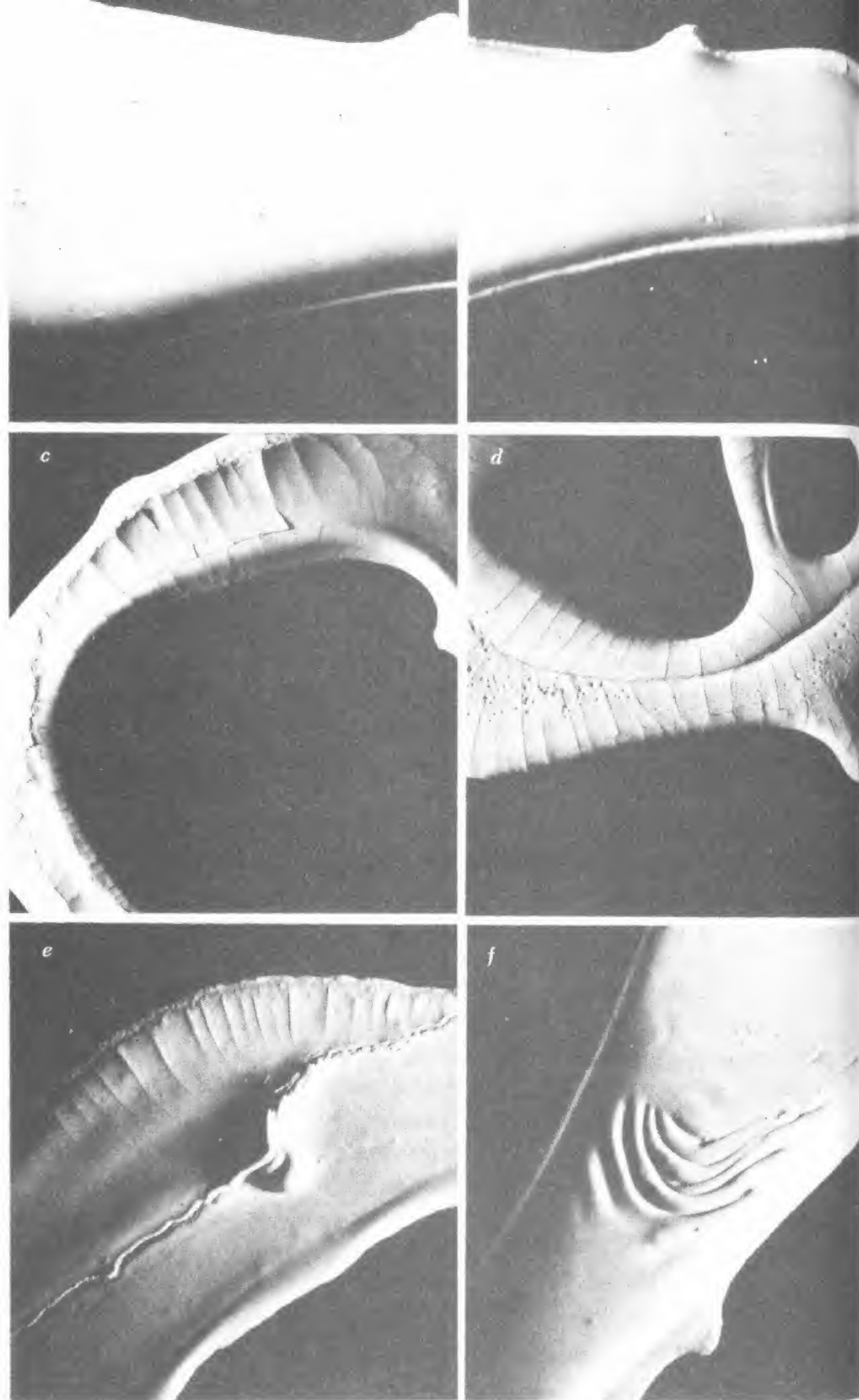
Un excelente ejemplo de la complejidad de formas surgidas de la interacción de fuerzas simples es el modelo de fisuras que se desarrolla al extender pintura sobre una plancha de vidrio. Dado que las capas internas de la pintura tardan en secarse más que las externas, los modelos basados en ángulos de  $90^\circ$  y  $120^\circ$  sufren una distorsión. Muchos de los fenómenos que tienen lugar cuando se seca la pintura sobre el vidrio son similares a los que se producen en la corteza terrestre, pese a la enorme diferencia existente entre las magnitudes de ambos.

No debemos sorprendernos ante estas analogías cuando recordamos que si la Tierra, con su núcleo líquido, fuera reducida al tamaño de una burbuja o de una gota, su corteza (la dura superficie rocosa que conocemos) tendría apenas el grosor de una fina película. Si nuestro planeta se redujera al tamaño de una naranja, no parecería en absoluto una naranja, sino que tendría más bien el aspecto blando y poco consistente de un tomate.

La figura 171 muestra diferentes estadios en el proceso de secado de una capa de pintura. En a vemos los inicios de dicho proceso en el borde extremo de la mancha, allí donde la pintura hace contacto con el cristal. En esa zona se forma un límite firme y consistente y, a medida que el proceso continúa, llega un momento en que dicho límite no puede contraerse más: se produce la fragmentación.

◀ Fig. 170





En la figura 171b observamos cómo el secado progresivo de la superficie de la pintura motiva que un fragmento de la misma, aún húmeda, traspase la frontera marcada por el límite ya seco, hacia el centro de la mancha. Como puede advertirse en c, sin embargo, es frecuente que al secarse se forme una especie de meseta interior, y también surgen a menudo fisuras en la parte superior de los rodetes laterales, cuando el material húmedo del interior del rodete es absorbido en los bordes que ya se han secado. La figura 171d muestra una fisura central con grietas secundarias que discurren perpendicularmente entre aquélla y los límites. Vemos asimismo el colapso central de algunas gotas individuales de pintura. De nuevo, la periferia ya seca de la gota extrae partículas líquidas desde el centro de la misma, lo que hace que en esta región se forme una pequeña depresión a modo de hoyuelo (similar al del grano de maíz seco). Si se coloca el cristal al revés mientras la pintura se seca, podemos justificar que los hoyuelos y fisuras no se produzcan debido a la acción de la fuerza de gravedad. No obstante, encontraremos las mismas oquedades y grietas, aun cuando la gravedad actúe directamente en contra de su desarrollo. En la figura 171d podemos apreciar también algunos pequeños agujeros formados a medida que las burbujas de aire llegan a la superficie en proceso de endurecimiento y liberan el gas que contienen. Estos agujeritos difieren de los hoyuelos vistos anteriormente, que son como sumideros, en tanto que los primeros se asemejan a aberturas volcánicas.

En la figura 171e se representa aún otro fenómeno geológico. El secado y colapsamiento de las pequeñas mesetas hace que el material húmedo que discurre bajo la superficie ascienda y salga fuera de la grieta central, de modo parecido a como la lava caliente es arrojada por los cráteres volcánicos y aberturas de la corteza terrestre. La figura 171f muestra el plegamiento de la capa de pintura cuando operan fuerzas laterales sobre ella (lo que puede conseguirse, por ejemplo, sosteniendo el cristal verticalmente mientras la pintura se va secando).

Por consiguiente, vemos que una diferencia en la contracción de las capas superficiales en relación con el interior de la mancha de pintura no determina la formación de modelos simples de hendiduras unidas según ángulos de  $90^\circ$  y  $120^\circ$ , sino que produce en

◀ Fig. 171



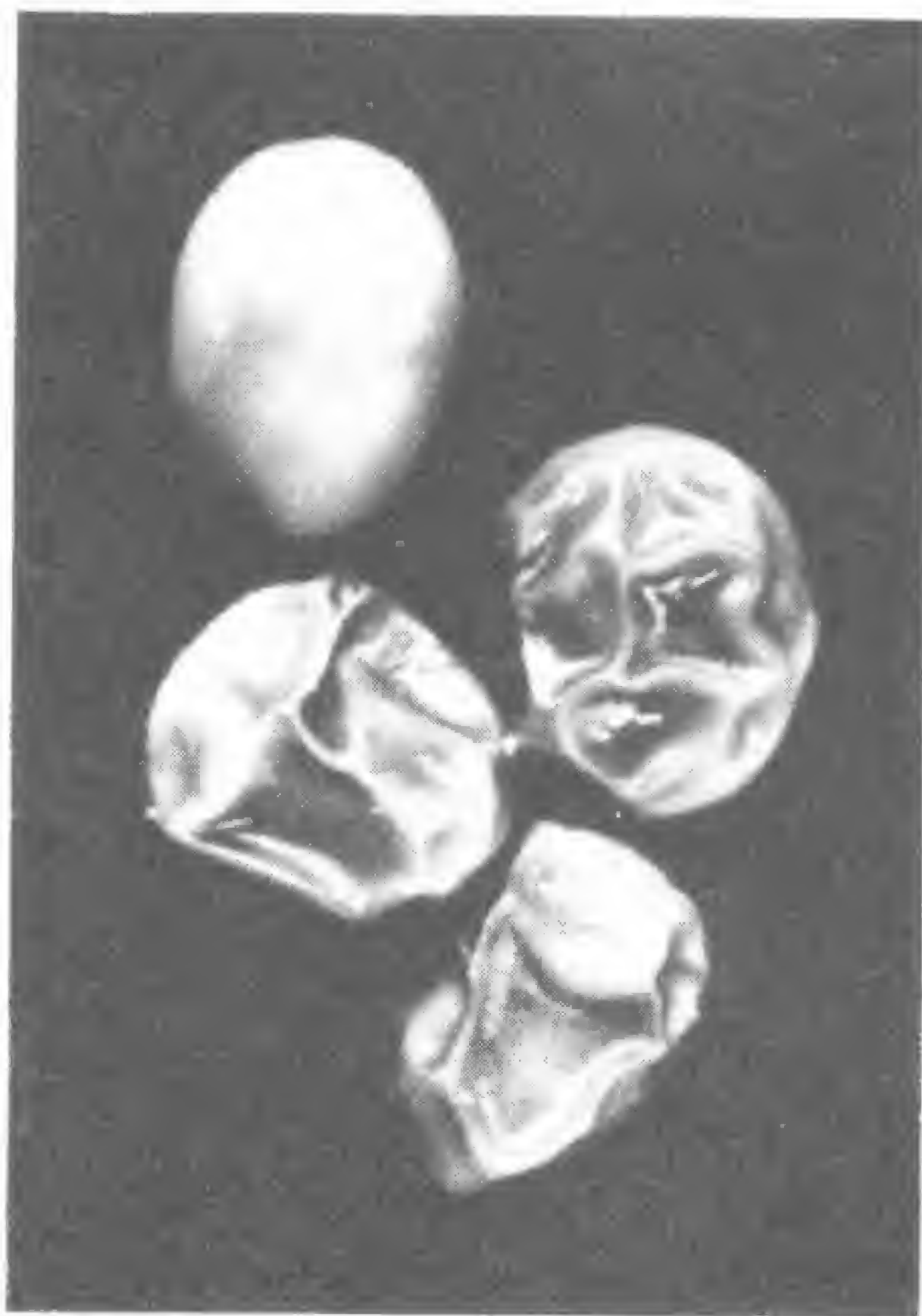


Fig. 172

su lugar muchos de los complejos modelos que encontramos en los procesos geológicos. Tanto la capa superficial de la pintura como la corteza terrestre se hallan fijadas en cuanto a su tamaño absoluto. Ambas se fragmentan y se deforman por la acción del movimiento de corrientes líquidas bajo sus superficies.

El geólogo A. J. Bull utilizó una interesante analogía para demostrar que la corteza terrestre tenía un tamaño fijo y preciso y que apenas había experimentado una contracción significativa. Para ello cubrió un globo de caucho inflado con una capa de gelatina y observó cómo ésta se arrugaba a medida que el globo se contraía. En los guisantes secos de la figura 172 vemos las mismas arrugas, y los mismos tipos de unión triple formados por éstas al encontrarse, que las estudiadas por Bull en la gelatina de su globo. Al igual que dicha gelatina, la piel del guisante se encoge todo lo que puede, se retira y deja crestas arrugadas cuya área es la más pequeña posible. Estas crestas se unen en redes de uniones triples, como lo hacían los res-

tos de leche hervida que veíamos en la figura 148a. La ausencia de estas triples uniones en las principales cadenas montañosas del mundo llevó a Bull a deducir que «las estructuras de la corteza terrestre no han sido producidas por una contracción general de ésta».

Doce años antes de que Bull realizara su experimento con el globo de caucho, Alfred Wegener propuso una teoría radicalmente diferente para explicar la historia de nuestro planeta. Wegener creía que el tamaño de la Tierra había permanecido aproximadamente igual desde los tiempos geológicos, pero suponía que los continentes habían ido flotando o derivando a través de su superficie terrestre de forma parecida a como lo hace la espuma que se origina en una sopa hirviendo. En un momento dado de la historia de la Tierra, todos los continentes habrían encajado unos con otros y se dispondrían juntos para formar un supercontinente, la denominada Pangea (toda la tierra), la cual flotaría en medio de un superocéano o Panthalasa (todo el mar).

Tras años de olvido, la teoría de Wegener fue encontrando poco a poco una amplia aceptación. La figura 173 (adaptada de Dietz, 1970) es una interpretación moderna del aspecto que presentaría la

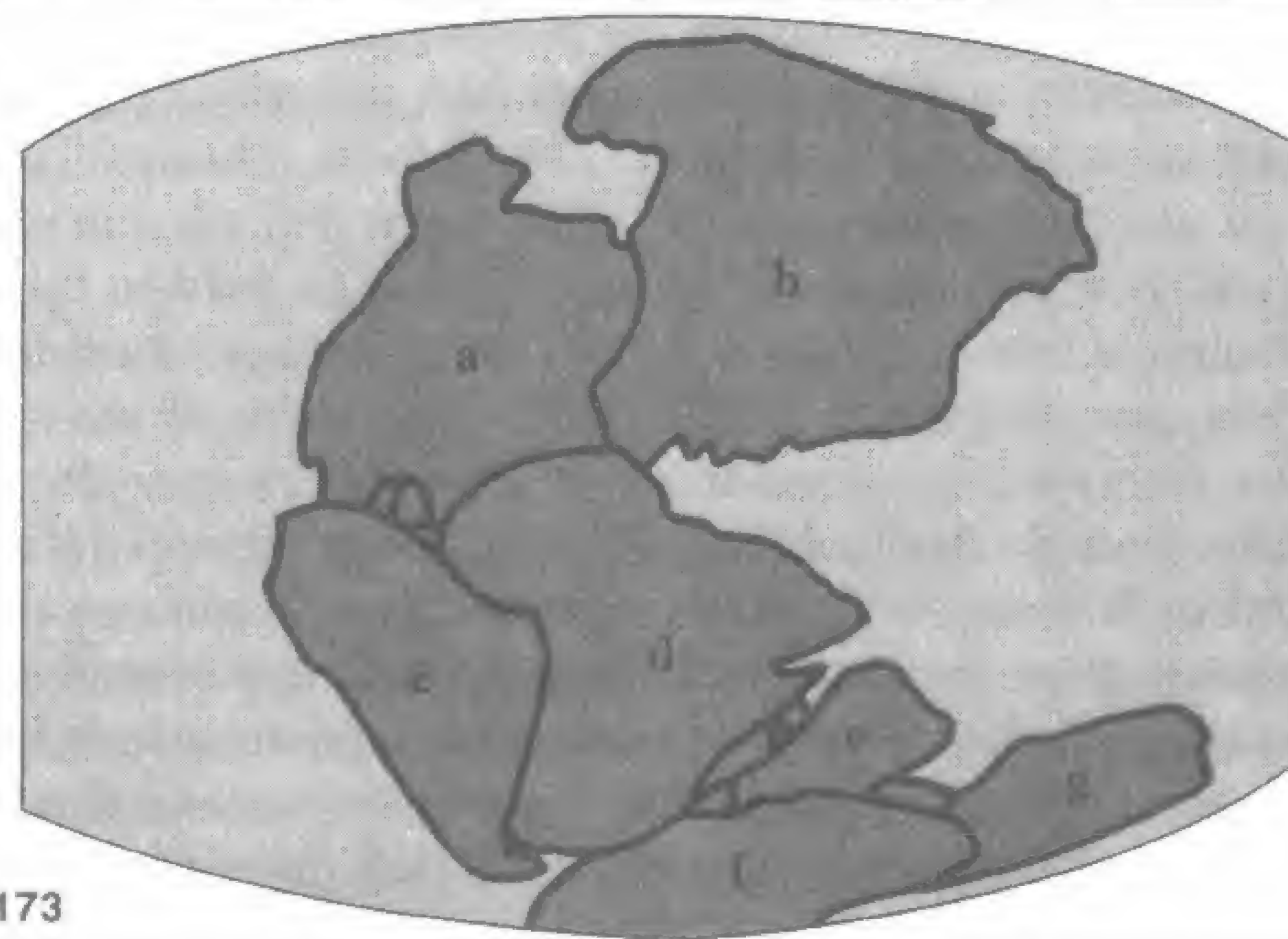


Fig. 173



Pangea hace unos 200 millones de años. Fragmentos de este supercontinente serían los continentes conocidos en la actualidad: *a*, Norteamérica; *b*, Asia; *c*, Sudamérica; *d*, África; *e*, India; *f*, Antártida, y *g*, Australia.

Al comienzo de la era de los dinosaurios, grandes fragmentos de corteza terrestre convergieron para formar la Pangea. Al concluir el reinado de los grandes reptiles e iniciarse el de los mamíferos, este único continente se escindió y las diversas partes a que dio lugar derivaron a través de la superficie de la Tierra en forma de placas cuyo espesor variaba de 60 a más de 90 km (lo que viene a representar el grosor de una piel de tomate en relación con el fruto completo).

Las placas y los continentes aún continúan moviéndose y pueden ser dirigidos en sus desplazamientos por las turbulencias del material semifluido situado debajo de la corteza y por la rotación terrestre, ya que, al igual que ocurre con la atmósfera, las placas se hallan desfasadas con respecto a dicho movimiento: su deriva tiene lugar invariablemente con un cierto retraso, es decir, hacia el oeste. A lo largo de nuestras vidas, por ejemplo, todo el subcontinente norteamericano habrá derivado al oeste en una longitud aproximadamente igual a la de nuestro cuerpo.

Aunque no comprendamos completamente el mecanismo que gobierna los desplazamientos de las placas, podemos apreciar las enormes distancias que algunas de ellas han recorrido. En la Pangea, como se representó en la figura 173, la India y Australia se encontraban unidas a la Antártida. La India fue la primera que se desgajó de ella y emigró hacia el norte hasta entrar en colisión con Asia y contribuir a la formación de la cadena del Himalaya. Australia inició también una emigración similar en dirección norte. El movimiento de los bloques correspondientes a Norteamérica y Sudamérica que alejó a éstos de Asia y África dio lugar a la formación del océano Atlántico. A partir de la grieta submarina situada entre estas placas continentales se proyectó material al exterior que originó nuevo fondo marino, de forma similar a como fluía la pintura de la hendidura representada en la figura 171e. Se calcula que cada año se incorporan a la corteza terrestre cerca de 50.000 millones de toneladas de tierra nueva desde las grietas que surcan el fondo oceánico.

Islandia, por ejemplo, incrementa constantemente su tamaño a medida que fluye material nuevo procedente de la grieta situada en mitad del océano Atlántico. Este material une los bordes que separan las placas, de forma que éstas aumentan su extensión como las placas del caparazón de tortuga de la figura 149b.

La figura 173 ofrece para nosotros un especial interés debido a que las hendiduras que presenta en ella la Pangea muestran puntos de unión triples, típicos de un material homogéneo sometido a fuerzas de tensión uniformes. Además, dado que podemos suponer que todas las placas se encuentran unas con otras en grupos de tres para formar una esfera, es posible utilizar las fórmulas topológicas que describen las relaciones espaciales entre los diferentes elementos de los poliedros dibujados en las figuras 5 y 6. De este modo, vemos que el número de puntos triples que definen el modelo de las placas puede relacionarse con *N*, el número de placas, mediante la fórmula:

$$2(N-2)$$

Los bordes de todas las placas equivalen a:

$$3(N-2)$$

Los bordes de una placa media vienen a ser:

$$\frac{6(N-2)}{N}$$

Por consiguiente, mediante el uso de estas fórmulas, que es como decir gracias al conocimiento de las limitaciones de las ordenaciones espaciales, resulta posible reconstruir el modelo total de las placas a partir de unas cuantas piezas.

Volviendo por un momento al experimento de Bull con su globo cubierto de gelatina, es interesante observar que, si bien las uniones formadas por la capa gelatinosa no representaban modelos de cadenas montañosas, sí que recuerdan de una forma sorprendente a las arrugas y circunvoluciones del cerebro humano, como observó



el biólogo W. E. Le Gros Clark. La analogía, que no resultaba apropiada en el caso de los repliegues de la corteza terrestre, sí lo es cuando se aplica a la corteza cerebral del hombre.

Por supuesto, las arrugas que aparecían en la gelatina o en la piel de los guisantes eran debidas a la contracción de la superficie. ¿Acaso se ha contraído también el cerebro humano? No, las arrugas de la superficie del cerebro miran hacia el interior, como los valles, y no hacia el exterior, según ocurre en el caso de las crestas. No ha existido por tanto ninguna contracción, sino que más bien ha tenido lugar en el cerebro una expansión que ha forzado a los valles, las partes que han quedado atrás en el proceso expansivo, a formar un modelo de uniones triples. El cerebro humano presenta la morfología de una piel de guisante vuelta del revés.

Otro ejemplo aparece en la figura 174, que muestra señales de pliegues, en las que se observan uniones triples, en el caparazón del cangrejo bayoneta. Antes de que se produzca la muda, el nuevo caparazón, situado por debajo del viejo, se pliega, de forma similar a como lo hace la piel de los dedos cuando éstos llevan un tiempo sumergidos en el agua. Una vez desprendido el caparazón viejo, el nuevo experimenta un engrosamiento y se endurece, quedando sólo las señales como testimonio de su plegamiento. También en el telson (apéndice terminal en forma de cola) aparecen, como se ve en la figura 174b, una serie de arrugas que, si bien presentan uniones triples en el centro del apéndice, se unen a los bordes, relativamente rígidos, en ángulos de  $90^\circ$ . No se producen tensiones paralelas a los bordes, y por ello las arrugas se unen a éstos perpendicularmente.

### Causas múltiples

Enumeremos los procesos que dan lugar al modelo de uniones triples: la tensión superficial, como sucede en las burbujas y pompas de jabón; el agrupamiento compacto, como en los bollos que se fríen en una sartén; la fragmentación, como en el barro, y el plegamiento, como es el caso del cerebro humano. Ante la existencia de tantos mecanismos diferentes como responsables del mismo modelo, es a todas luces imposible, basándonos sólo en el propio modelo,

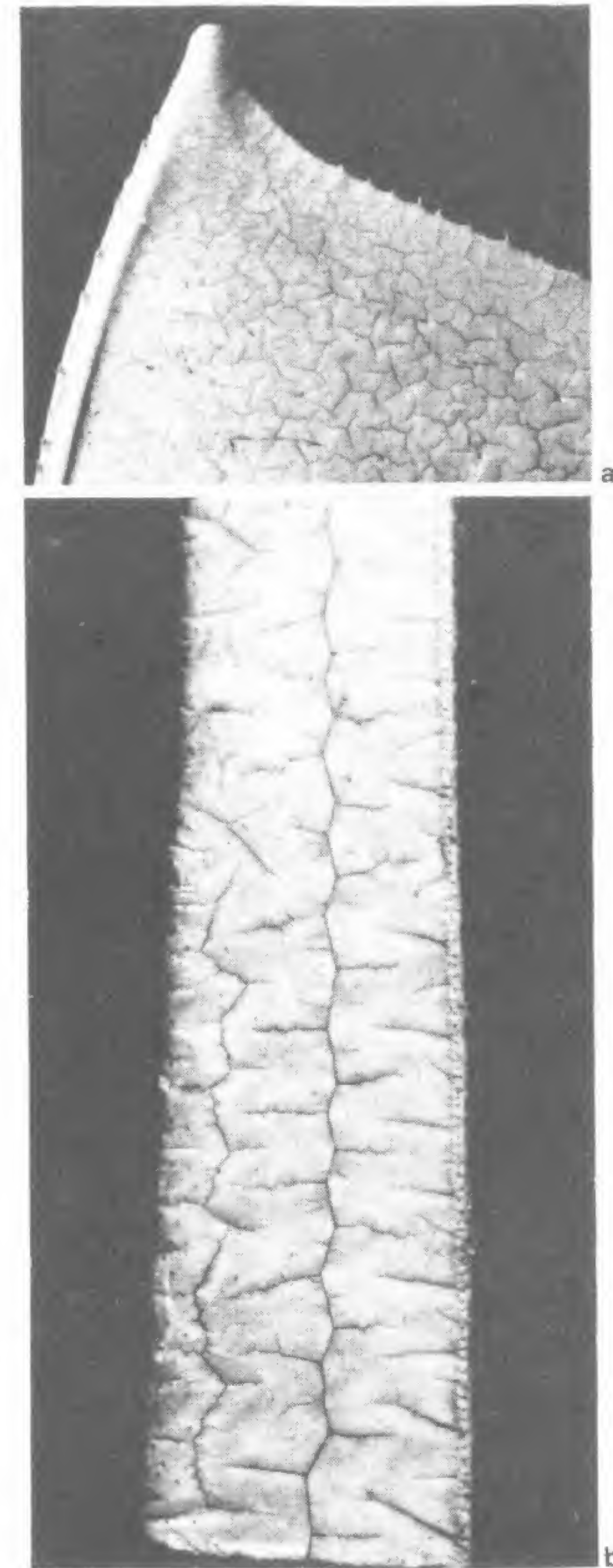


Fig. 174



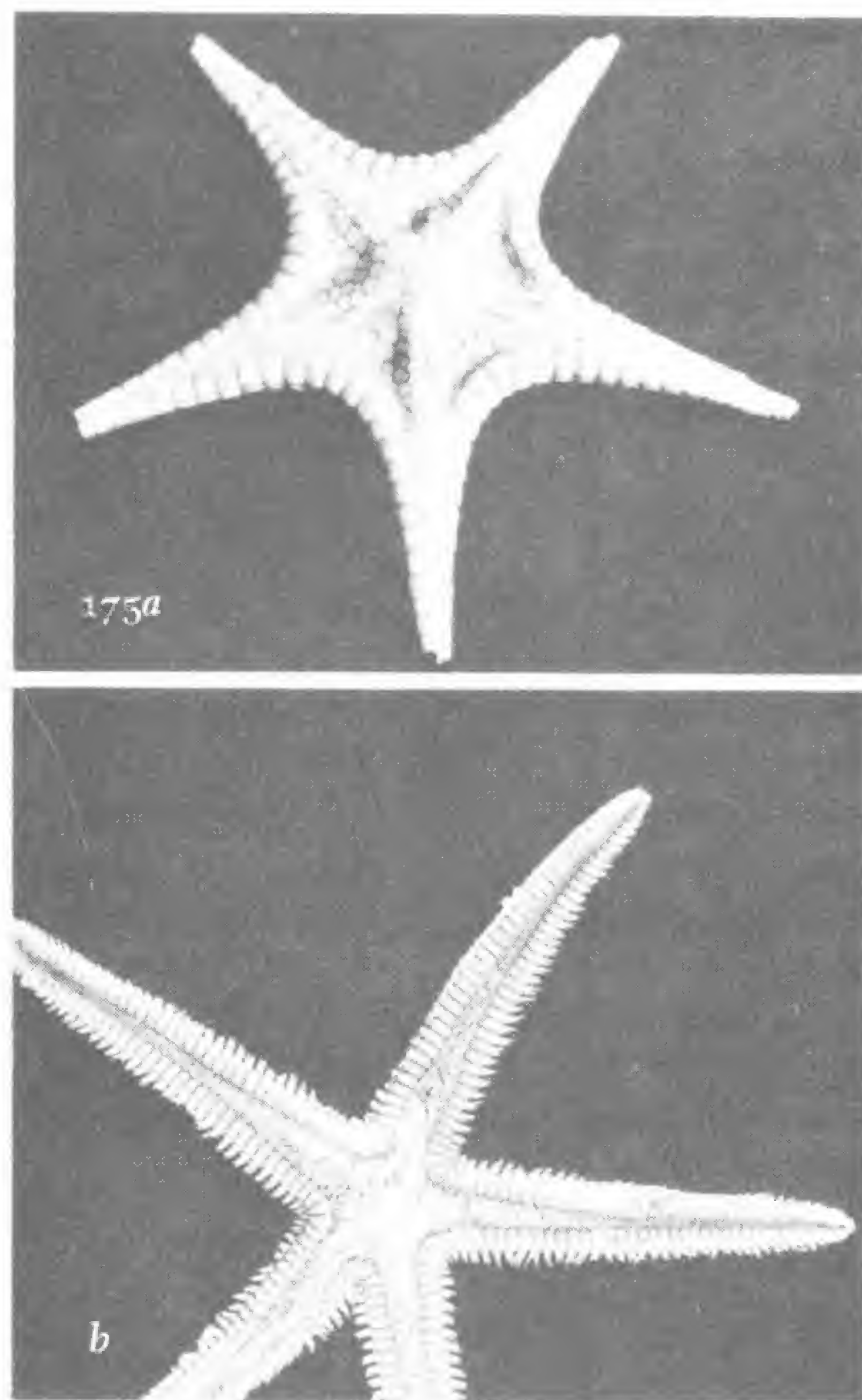


Fig. 175

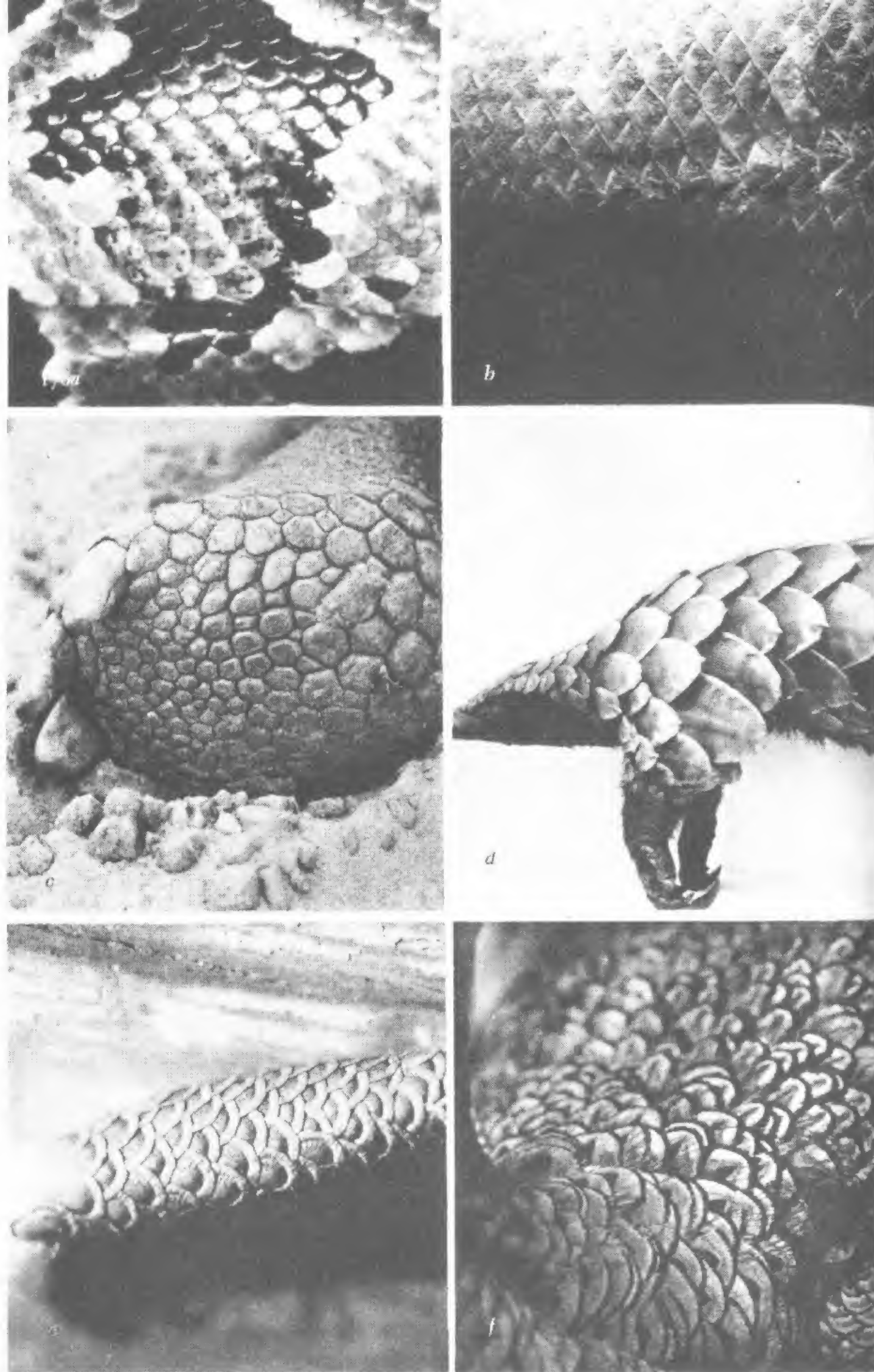
determinar cómo surge éste. En la figura 175, por ejemplo, no podemos decir por qué las fisuras que se observan en la estrella de mar se alinean de tres en tres en el centro del cuerpo y perpendicularmente en los bordes del mismo: ¿está implicado el proceso de fragmentación? ¿El agrupamiento compacto de las células? ¿La tensión superficial? Quizás actúen a la vez todas estas fuerzas. Un modelo similar



aparece en la estrella de mar de la figura 175b. Observemos los gálbulos de c y el fruto de una planta del género *Pandanus* en d. Los vértices de tercer orden surgen una y otra vez, dondequiera que miremos.

En la figura 176 podemos ver otro ejemplo más referente a la dificultad de determinar los orígenes de este modelo tan extendido.





En esta figura aparecen seis tipos de formaciones escamosas: *a*, la piel de una serpiente; *b*, la piel de un pez (perteneciente a un celacanto fotografiado en el museo de la universidad de Harvard); *c*, la pata de una tortuga; *d*, los pelos fusionados de un pangolín (fotografiado en el museo de la universidad de Harvard); *e*, semillas de algodóncillo, y *f*, plumas de un pavo real de Java (fotografiado también en el museo de la universidad de Harvard). Cada escama, grupo de pelos fusionados, semilla o pluma solapa el punto de inserción de las otras dos, de manera que sus bordes se encuentran en grupos de tres. Todas estas «escamas» cumplen funciones distintas y, pese a ello, todas son variaciones del mismo tema trirradial.

Ahora bien, tanto la tensión superficial como el agrupamiento compacto o el plegamiento, ¿no tienen algo en común que explique por qué todos ellos dan lugar al mismo modelo? En cierto sentido, sí. El elemento común es que todos producen superficies mínimas. Las partículas de jabón y agua se contraen en sí mismas; los bollos expandidos por la acción del calor ejercen presión unos sobre otros de forma que minimizan las superficies de contacto; las hendiduras que se originan como consecuencia de la fragmentación dejan al descubierto la menor cantidad posible de material, y las arrugas y plegamientos constituyen los restos mínimos que dan lugar a la contracción o la expansión de una superficie. Todos estos procesos se caracterizan por minimizar el trabajo o la energía.

Vemos así que el mecanismo específico que produce un determinado modelo o forma no es tan importante como su apariencia global y el modo en que sus partes constituyentes se relacionan entre sí en el espacio: si estas partes pueden ajustarse libremente y encontrar así una situación de equilibrio, se ordenan según una configuración de mínima energía. Un corte o sección plana a través de esta configuración revelará la existencia de uniones de  $120^\circ$ , no porque la Naturaleza esté dominada por una misteriosa pasión que la impulse a crear vértices trirradiales, sino debido a que tres rectas son los elementos mínimos que pueden ser unidos en un solo punto al subdividir un plano.

En estos ejemplos de mínima energía, los tabiques de separación, las superficies, las hendiduras y los plegamientos forcejean entre sí hasta que encuentran una situación de equilibrio en las unio-

◀ Fig. 176



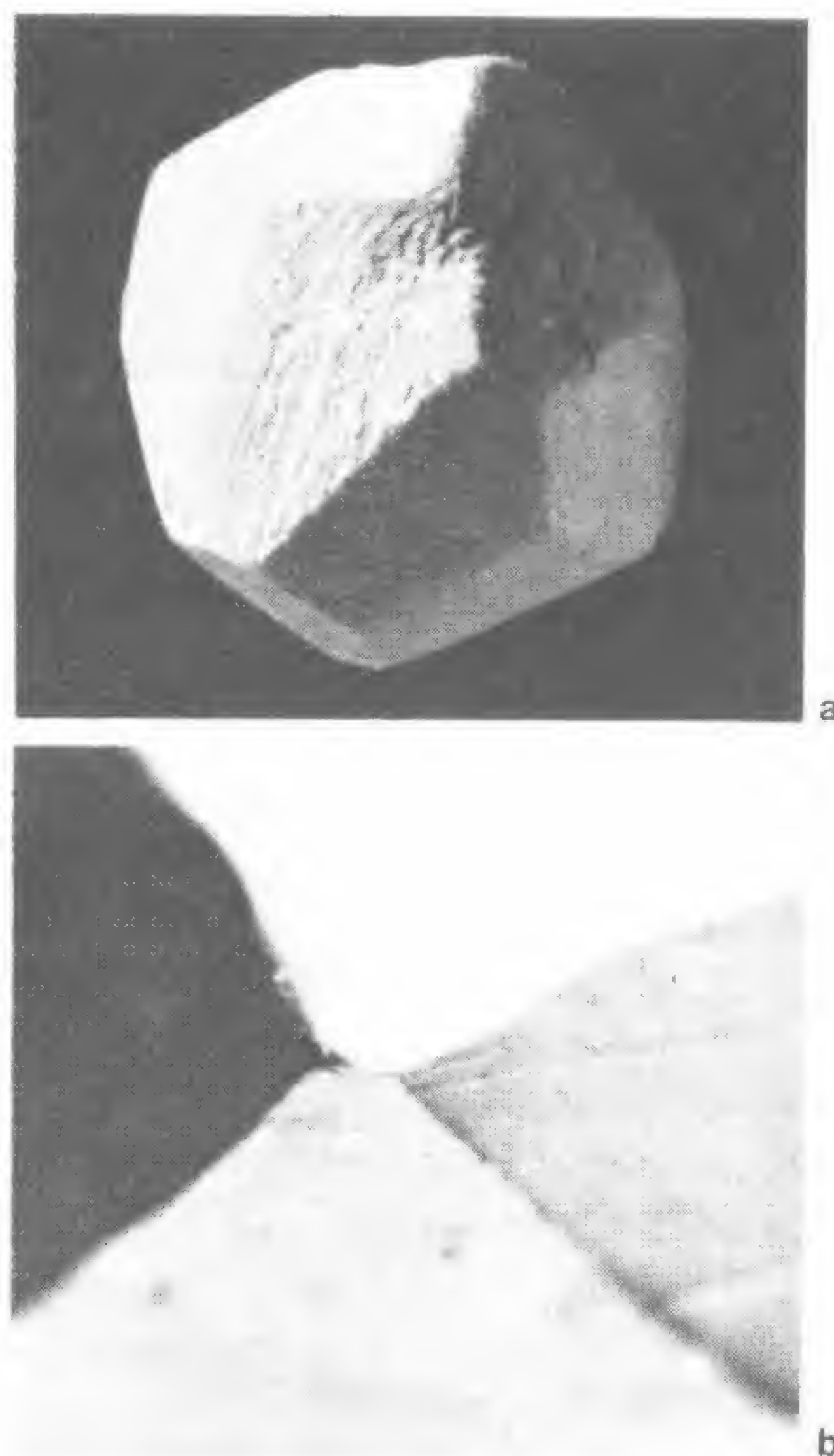


Fig. 177

nes triples. Este modelo de uniones pueden producirse incluso de una forma más directa, sin que exista una interacción entre las partes; puede constituir simplemente el modelo más probable entre una serie de ellos.

A modo de ejemplo, la figura 177a muestra cómo una esfera de tiza desarrolla caras planas por efecto del roce contra un encerado. Las aristas de estas caras se unen de tres en tres en cada vértice. Rara vez encontraremos un vértice de cuarto orden, donde converjan cuatro aristas. La explicación de esto puede verse en la figura 177b, en la que aparece un trozo de arcilla con una serie de cortes

realizados de modo que cinco aristas se unan en dos uniones triples. Para conseguir que la arista central (que conecta las dos triples uniones) desaparezca, de forma que las cuatro aristas se unan en un único punto, deben darse los cortes con suma precisión. Si se efectúa un corte superficial a la derecha o a la izquierda, las dos triples uniones se aproximan y la arista intermedia se acorta. Si el corte es más profundo, las dos uniones pasarán una a través de otra para originar una arista intermedia que forme ángulos rectos con la ya existente. Hay muchas probabilidades de que no se dé el corte con la profundidad adecuada. Y la Naturaleza tampoco puede hacerlo mejor. Si se produce una unión cuádruple en la superficie de

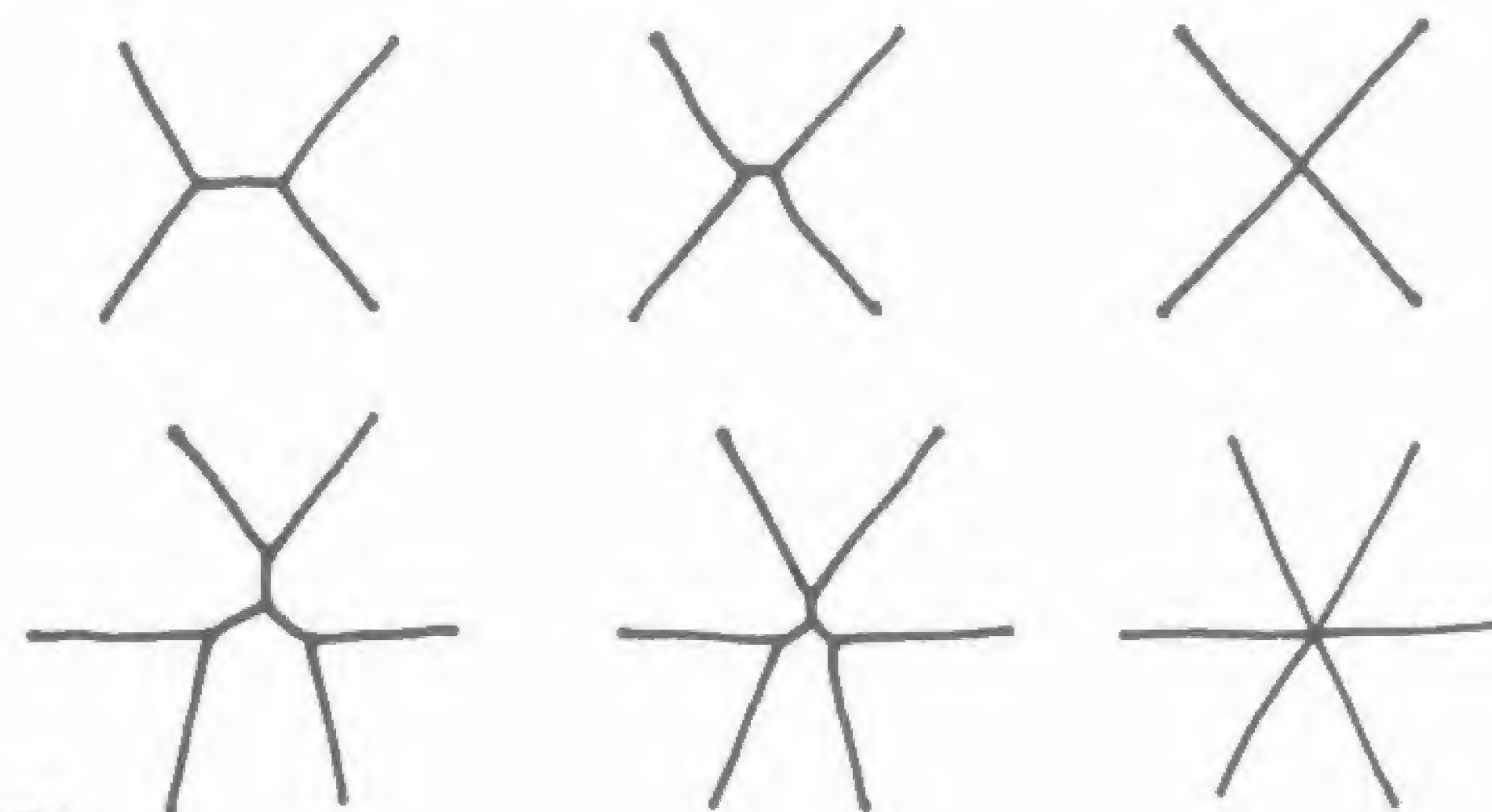


Fig. 178

la tiza, degenera rápidamente en dos uniones triples. La figura 178 indica la precisión con la que deben encontrarse las uniones triples a fin de que se establezcan otras cuádruples o séxtuples (dos uniones triples en el primer caso y tres en el segundo).

La figura 179 muestra que tanto en el agua que llena un molde de tarta y que vibra a 510 ciclos por segundo (a), como en la superficie de un lago rizada por el viento y reflejada por el fondo arenoso del mismo (b), o en las ondulaciones de la arena (c), los vértices de tercer orden son generados con una probabilidad mayor que los de cuarto, quinto o sexto órdenes.



El esquema de la figura 180 aclara mejor este punto. Cuando las crestas, representadas por líneas oscuras, se fragmentan en puntos situados al azar, según se aprecia en la parte de arriba de la figura, los valles que se hallan entre ellas se unen de tres en tres. Para obtener uniones de cuarto orden en los valles, todas las crestas han de romperse a lo largo de una misma línea, lo que es mucho menos probable, como se ve en la parte inferior del esquema.

Por consiguiente, debemos añadir la probabilidad a nuestra lista

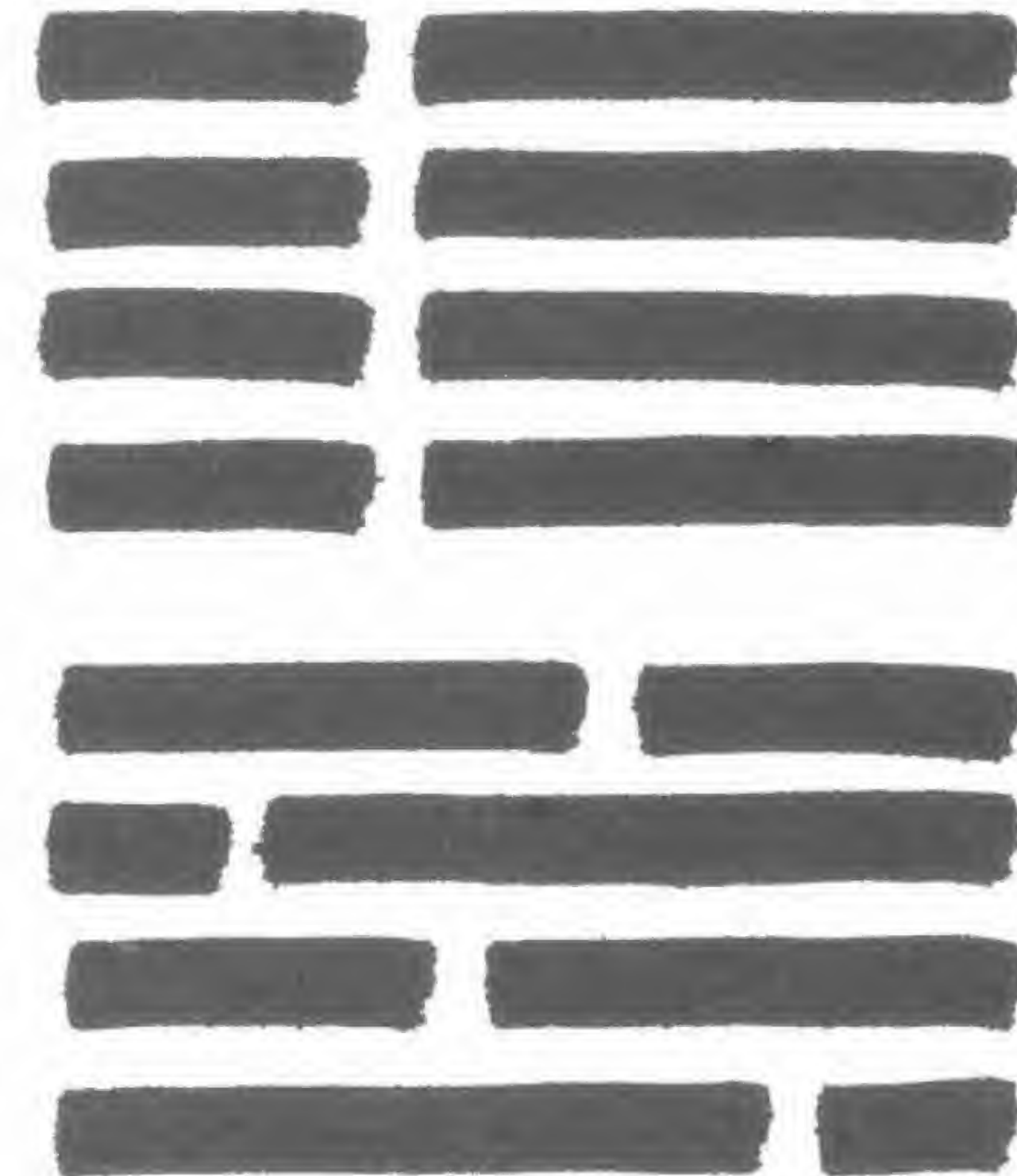


Fig. 180

de explicaciones acerca del origen de las uniones triples. Y, observando las variaciones en las escamas y plumas de la figura 176, también hemos de considerar la evolución como una de estas causas. Después de todo, ¿acaso no resulta ventajoso disponer de escamas que se solapan de forma que cubran las uniones de las otras? ¿No es ésta una explicación adecuada de las similitudes morfológicas que existen entre las escamas de una boa constrictora y las plumas de un gorrión?

Fig. 179



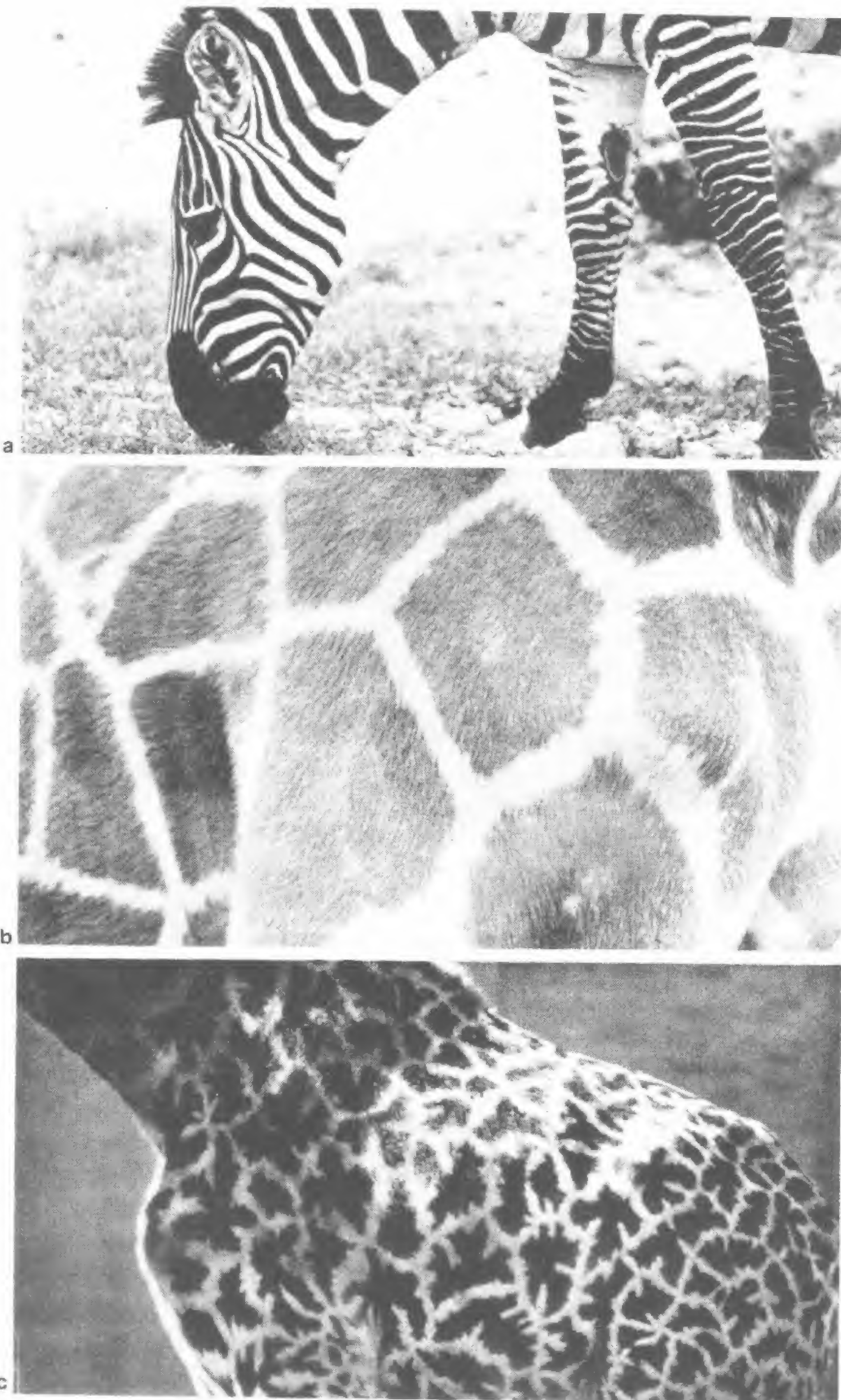


Fig. 181

¿Qué explicación debemos invocar para describir las marcas que presentan la piel de la cebra y la de las jirafas de la figura 181? Ciertamente, estos modelos deben haber poseído algún tipo de ventaja evolutiva, mas ¿qué mecanismos físicos concretos los han originado? Las uniones de las marcas en la cebra se parecen al rizado de la arena. Quizá son debidas al azar. Pero las marcas de la jirafa de la figura 181b son demasiado regulares como para atribuir su origen a la casualidad. Parecen más bien un producto de la tensión superficial. Sin embargo, surge de nuevo la pregunta: ¿cómo podría producir la tensión superficial el modelo de marcas que vemos en la figura 181c? ¿Son los mecanismos que originan estos modelos necesariamente idénticos en las dos razas de jirafas? No lo sabemos. Uno de los grandes misterios biológicos aún no resueltos es precisamente explicar cómo se originan estos modelos. Su origen puede provenir de muy variadas causas.

Cualquiera de las tres explicaciones generales que hemos dado acerca de la apariencia y forma de los cuerpos, es decir, tendencia a adoptar un estado de mínima energía, mayor o menor probabilidad de que una determinada configuración se dé y la actuación de la evolución selectiva, resulta suficiente para mostrar el origen de los vértices triples. Cada una de estas explicaciones establece de forma independiente el mismo modelo. Por consiguiente, éste se halla determinado por múltiples causas. Una y otra vez comprobamos este hecho, de manera que, como observó Leonardo da Vinci, la Naturaleza se muestra limitada y finita.

Sus límites provienen de que el espacio prohíbe mucho y permite muy poco. De la misma forma que si la Naturaleza precisa un flujo directo a o desde un punto central debe adoptar el modelo de explosión, y si ha de realizar una trayectoria al mismo tiempo corta y directa tiene que introducir la ramificación, así, si necesita un sistema económico y ahorrativo, ha de utilizar las uniones triples. Vemos nuevamente que la Naturaleza no puede construir lo que quiere y de la forma que desee, sino que ha de emplear modelos hexagonales, es decir, vértices de tercer orden, a fin de ahorrar material, y combinar otros módulos con estos hexágonos para encerrar el espacio. Como hemos visto anteriormente, la Naturaleza no puede fabricar un copo de nieve de estructura pentagonal ni un cristal regu-



lar icosaédrico, ni tampoco unir una fisura nueva y otra vieja en un ángulo diferente de  $90^\circ$ . De modo similar, ha de incrementar la superficie de un organismo grande si éste tiene que funcionar como uno pequeño. El crecimiento de una parte afecta al crecimiento del conjunto.

Las reglas son rigurosas, pero dentro de ellas abunda la variedad; y estas reglas, en suma, enseñan por medio de las variaciones a representar una conexión entre las distintas partes que sea estéticamente agradable, mostrándonos una constancia de propósitos que proporciona un modelo eterno para todas las creaciones salidas de la mano y de la mente del hombre.

## NOTAS A LOS CAPÍTULOS

### 1. ESPACIO Y TAMAÑO

#### La naturaleza del espacio

Para una breve historia de los cambios experimentados por las concepciones del hombre acerca del espacio, ver Sir Edward Whittaker, *From Euclid to Eddington* (Nueva York: Dover, 1958). Una descripción de las distintas características de los espacios euclídeos y no euclídeos está contenida en Charles P. Steinmetz, *Four Lectures on Relativity and Space* (Nueva York: Dover, 1967).

Sobre los planteamientos de Wheeler, ver John A. Wheeler, *Geometrodynamics*, en Cecile M. DeWitt y John A. Wheeler, editores, *1967 Lectures in Mathematics and Physics, Battelle Rencontres* (Nueva York: W. A. Benjamin, Inc., 1968); «Our Universe: The Known and the Unknown», *American Scientist* 56, n.º 1 (1968): 1-20; *New York Times*, febrero 5, 1967, p. E5; y abril 4, 1971, p. E7.

#### Poliedros y mosaicos

Pueden encontrarse descripciones de los mosaicos regulares y semirregulares en W. W. R. Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, 11.ª ed. (Macmillan, Londres: 1959); y A. F. Wells, *The Third Dimension in Chemistry* (Nueva York: Oxford University Press, 1956).

Los catorce poliedros semirregulares de la figura 6 son los trece poliedros de Arquímedes más el «seudorrombocuboctaedro» descubierto por C. P. Miller y descrito más recientemente por V. G. Askimuze.



El agrupamiento de poliedros se describe en el trabajo clásico de Angelo Andreini, «Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sull corrispondenti reti correlative», *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana Delle Scienze*, (Roma: 1907), 14, ser. 3, 75-129.

### El efecto de la escala

La descripción más completa del efecto de la escala es aún hoy el segundo capítulo de la obra de D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 2ª ed. (Cambridge, Gran Bretaña: University Press, 1942). El lector interesado debería consultar también el trabajo de Bonner en John T. Bonner, *Morphogenesis* (Nueva York: Atheneum, 1963); y «The Size of Life», *Natural History* 78, n.º 1 (enero 1969): 40-45.

Hay diversas referencias en F. W. Went, «The Size of Man», *American Scientist* 56, n.º 4 (1968), 400-413. Puede encontrarse material adicional con valiosas referencias en Stephen J. Gould, «Allometry and Size in Ontogeny and Phylogeny», *Biological Review* 41 (1966): 587-640.

La obra de Galileo es la conocida *Dos Nuevas Ciencias*.

Las palabras de J. B. S. Haldane se encuentran en «On Being the Right Size», en James R. Newman, *The World of Mathematics*, vol. 2, pp. 952-957 (Nueva York: Simon and Schuster, 1956).

Un excelente artículo sobre el crecimiento de las raíces es el de Emanuel Epstein, «Roots», *Scientific American* 227, 5 (mayo 1973).

Los datos sobre latidos cardiacos proceden de una presentación realizada en el Museo de la Ciencia de Boston, y los relativos al batido de alas en diferentes especies tienen su origen en fuentes diversas, entre ellas el artículo de David S. Smith, «The Flight Muscles of Insects», *Scientific American* 212, n.º 6 (junio 1965): 76-88; y en A. V. Hill, «The Dimensions of Animals and Their Muscular Dynamics», *Science Progress* 38 (Londres, 1950): 209-230.

El modelo en látex de pulmón humano, que aparece en la figura 13a, fue proporcionado por Michael Woldenberg, del Laboratory for Computer Graphics de la universidad de Harvard. El modelo en plástico de las arterias de perro, de la figura 13c, procede del Museo de la Ciencia de Boston, Massachusetts.

La fotografía de la tibia humana que aparece en la figura 19g fue tomada por Carl Struve y se reproduce con el permiso de Prestel-Verlag de Munich, Rep. Fed. Alemana. El modelo de la figura 19h se reproduce gracias a la cortesía de Frei Otto del Estudio Warmbronn, en Warmbronn, Rep. Fed. Alemana.

Los análisis de Ranko Bon sobre formas de construcción puede encontrarse en «Allometry in Micro-Environmental Morphology» (Universidad de Harvard, Laboratory of Computer Graphics: 1971).

## 2. DISEÑOS BÁSICOS

La cita introductoria es de Francis Bacon, «Of the Advancement of Learning», *The Works of Francis Bacon*, vol. 1, p. 104 (Londres: H. Bryer, 1803).

La forma en que los diseños ramificados minimizan la longitud total ha sido descrita por Luna B. Leopold, «Trees and Streams: The Efficiency of Branching Patterns», *Journal of Theoretical Biology* 31 (1971): 339-354.

Para obtener una información más completa acerca del análisis matemático de sistemas ramificados, ver A. Shimbel, «Structural Parameters of Communication Networks», *Bulletin of Mathematical Biophysics* 15 (1953): 501-507.

Puede encontrarse una nueva y rigurosa exposición sobre grupos de simetría limitada en una y dos dimensiones en Arthur L. Loeb, *Color and Symmetry* (Nueva York: Wiley, 1971).

La fotografía de la maqueta de la Sagrada Familia de Gaudí que aparece en la figura 27a se reproduce por cortesía de Verlag Gerd Hatje de Stuttgart, Rep. Fed. Alemana. La del modelo estructural de Frei Otto, de la figura 27b, es reproducida por cortesía de Frei Otto, del Estudio Warmbronn, de Warmbronn, Rep. Fed. Alemana.

## 3. TODO FLUYE

### El número de Reynolds

Una excelente introducción al concepto de número de Reynolds puede hallarse en Asher H. Shapiro, *Shape and Flow* (Nueva York: Anchor Books, 1961). Un tratamiento más completo lo constituye el magnífico libro de G. K. Batchelor, *Introduction to Fluid Dynamics* (Nueva York: Cambridge University Press, 1967). El trabajo original de Reynolds apareció en Osborne Reynolds, «An Experimental Investigation of the Circumstances



Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and the Laws of Resistance in Parallel Channels», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174 (1883): 935-982.

### La turbulencia en el Universo

El papel a gran escala de la turbulencia en el Universo es expuesto en George Gamow, *The Creation of Universe* (Nueva York: Viking, 1961), así como en los artículos de Gamow para el *Scientific American*: «Modern Cosmology», «Turbulence in Space» y «The Evolutionary Universe». Los dos primeros se reimprimieron en *The New Astronomy*, libro formado con la recopilación de diferentes artículos publicos por Scientific American (Nueva York: Simon and Schuster, 1955). Para consultar el tercer artículo, ver *The Universe* (Nueva York: Simon and Schuster, 1956, 1957).

La figura 37b es una fotografía de la nebulosa Rosetón en la constelación Monoceros (N6C 2237-9), tomada y reproducida con el permiso del Harvard College Observatory. La figura 37d muestra la nebulosa 36 NGC 6523 en Sagitario, Messier 8 y la nebulosa Laguna; la 37f muestra la galaxia espiral barrada 5 NGC 1300 de Eridano; la 37h es la 7 NGC 1952 Nebulosa del Cangrejo en Tauro, Messier 1; y la 39a es la galaxia espiral NGC 5194 en los Canes, Messier 51, con la galaxia satélite NGC 5195.

### Estelas de vórtices

Un excelente artículo sobre silbidos y estelas de vórtices es el de Robert C. Chanaud, «Aerodynamic Whistles», *Scientific American* 222 (enero 1970).

La sorprendente fotografía de la estela de vórtices de la figura 40 fue tomada por Owen Griffin y Steven Ramberg, del U. S. Naval Research Laboratory en Washington, D. C., y se publica en la presente obra con su permiso. Ver O. M. Griffin y C. W. Votaw, «The Use of Aerosols for the Visualization of Flow Phenomena», *International Journal of Heat Mass Transfer* 16 (Pergamon Press: 1973): 217-219, y «The Vortex Street in the Wake of a Vibrating Cylinder», *Journal of Fluid Mechanics* 55 (1972): 31-48.

El destacado trabajo de Heinrich Hertel sobre la natación de las serpientes, la propulsión de los peces, el vuelo de los insectos y estructuras naturales y artificiales es *Structure, Form and Movement* (Nueva York: Reinhold 1966).

Un estudio reciente sobre las formaciones en V en las aves migratorias

se encuentra en P. B. S. Lissaman y Carl A. Shollenberger, «Formation Flight of Birds», *Science* 168 (22 de mayo de 1970): 1003-1005.

### Tensión y flujo

La sugestiva exposición de Feynman sobre la «unidad subyacente de la Naturaleza» se encuentra en P. Feynman, Robert B. Leighton y Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 2, p. 12 (Reading, Mass: Addison-Wesley, 1964).

### Fuerzas de tensión en la madera y en los huesos

El modelo de las fuerzas de tensión que actúan sobre una barra, que aparece en la figura 47, está sacado de S. Timoshenko y Gleason H. MacCullough, *Elements of Strength of Materials* (Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1949).

Un excelente resumen de la teoría de las trayectorias de tensión en el desarrollo del hueso lo constituye la obra de Patrick D. F. Murray, *Bones* (Cambridge: University Press, 1936). La figura 48 procede de la p. 102 de este libro. La referencia de Thompson citada para la figura 72 es, por supuesto, de D'Arcy Thompson, *On Growth and form*, 2ª ed. (Cambridge: University Press, 1942). Otro excelente tratamiento sobre el crecimiento del hueso se halla en Andrew C. Bassett, «Electrical Effects in Bone», *Scientific American* 213 (octubre 1965): 18-25.

Una revisión de lo poco que aún hoy se conoce acerca de los efectos de las corrientes eléctricas sobre el crecimiento de las plantas se encuentra en Bruce I. H. Scott, «Electricity in Plants», *Scientific American* 207 (octubre 1962): 107-117.

La figura 43, que muestra líneas de fuerzas eléctrica, se ha tomado de Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. 1, figura 12 (Oxford: Clarendon Press, 1892).

### Tensión, flujo e ingeniería

Una interesante discusión sobre el diseño de estructuras arquitectónicas y las relaciones entre los factores estéticos y de ingeniería se halla en Curt Siegel, *Structure and Form in Modern Architecture* (Nueva York: Reinhold, 1962).

Los tanques de almacenamiento de forma esferoidal que aparecen en la figura 53a fueron construidos por la Chicago Bridge and Iron Company



y se utilizaron para el almacenamiento de líquidos volátiles como la gasolina. La fotografía de la gota de agua de la figura 53b fue tomada por el doctor Rolf Schaal de Zürich, Suiza, y se reproduce en la presente obra con su permiso.

## 4. ESPIRALES, FORMAS SINUOSAS Y EXPLOSIONES

### Espirales

La cita sobre los vientos del oeste de Texas procede de un relato de Frank Neff y William Henry en B. A. Botkin, editor, *Folk-Say: A Regional Miscellany* (Norman, Oklahoma: University of Oklahoma Press, 1930).

Un maravilloso libro sobre espirales es el de Martin Gardner. *Izquierda y derecha en el cosmos* (Barcelona: Salvat Editores, 1985).

Los efectos del entorno sobre el enrollamiento de las conchas de los moluscos se discute en Stephen J. Gould, «Ecology and Functional Significance of Uncoiling in *Vermicularia spirata*: An Essay on Gastropod Form», *Bulletin of Marine Science* 19 (junio 1960): 432-445.

El desarrollo evolutivo de los hábitos alimentarios de *Dictyodora*, desde los movimientos aleatorios iniciales hasta las trayectorias en espiral y helicoidales, se describen en Adolf Seilacher, «Fossil Behavior», *Scientific American* 216 (agosto 1967): 72-80.

Para una mayor información acerca de la espiralización de conchas y cuernos, ver D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 2ª ed. (Cambridge: University Press, 1942).

La fotografía de la figura 62 se reproduce gracias a la cortesía de L. L. Rue Enterprises de Blairstown, Nueva Jersey.

### Formas sinuosas

La fotografía de la columna flexible de la figura 66 se reproduce con el permiso de Frei Otto del Estudio Warmbronn, Warmbronn, Rep. Fed. Alemana.

La fotografía de los dominios magnéticos en el granate, correspondiente a la figura 67b, se reproduce con el permiso del doctor Andrew H. Bobeck, de los laboratorios de la Bell Telephone.

Luna Leopold ha escrito numerosos textos sobre los meandros de los ríos. Ver Luna Leopold y W. B. Langbein, «River Meanders», *Scientific*

*American* 214 (junio 1966): 60-70; para nuevas referencias, ver Luna B. Leopold, M. G. Wolman y John P. Miller, *Fluvial Processes in Geomorphology* (San Francisco, 1964). También Luna B. Leopold y M. Gordan Wolman, «River Meanders», *Bulletin of the Geological Society of America* 71 (1960): 769-794.

El ensayo de Albert Einstein sobre los meandros es «The Cause of the Formation of Meanders in the Courses of Rivers and of the So-Called Beer's Law» en *Essays in Science* (Nueva York: Wisdom Library, 1933, 1934).

La fotografía del río de Alaska de la figura 69 se reproduce gracias a la cortesía de Georg Gerster.

El movimiento de las serpientes aparece descrito en el excelente trabajo de Carl Gans, «Locomotion without Limbs», *Natural History* 75 (febrero 1966): 10-16; y «How Snakes Move», *Scientific American* 222 (junio 1970): 82-96.

### Explosiones

La fotografía del cráter de Tycho en la figura 72 fue tomada por el Observatorio de Lick y se reproduce con su permiso.

La hermosa fotografía de la gota de leche y la salpicadura en forma de corona que produce, correspondiente a la figura 79, se reproduce con el permiso del doctor Harold E. Edgerton, del Instituto Tecnológico de Massachusetts.

Una comparación entre el crecimiento de las manchas de tinta y el de las formas biológicas aparece en Paul Weiss, *Principles of Development* (Nueva York: Henry Holt, 1939).

## 5. MODELOS DE RAMIFICACIÓN

Los artículos importantes en el análisis de los sistemas ramificados, en especial los relativos a ríos y cursos de agua, incluyen:

Luna B. Leopold y W. B. Langbein, «The Concept of Entropy in Landscape Evolution», U. S. Geological Survey, *Professional Paper* 500A, A1-A20, 1962.

Robert E. Horton, «Erosional Development of Stream and Their Drai-



nage Basins: Hydrophysical Approach to Quantitative Morphology», *Bulletin of the Geological Society of America* 56 (1945): 275-370.

A. N. Strahler, «Hypsometric (Area-Altitude) Analysis of Erosional Topology», *Bulletin of the Geological Society of America* 63 (1952): 1117-1142.

Michael J. Woldenberg, «A Structural Taxonomy of Spatial Hierarchies», *Colston Papers*, vol. 22 (Londres: Buttersworths Scientific Publishers, 1970); y «Spatial Order in Fluvial Systems: Horton's Laws Derived from Mixed Hexagonal Hierarchies of Drainage Basin Areas», *Bulletin of the Geological Society of America* 80 (1969): 97-111.

Ronald L. Shreve, «Statistical Law of Stream Numbers», *Journal of Geology* 74 (1966): 17-37.

El rayo que aparece en la figura 90 fue fotografiado originalmente por Ed Holbert y apareció, por cortesía de Thompson Lightning Protection Inc., en el libro *Time* (Nueva York: Time-Life Books, 1966), p. 117.

### Trabajo mínimo y ángulos en la ramificación

El trabajo de Cecil D. Murray sobre los ángulos de ramificación en arterias y árboles se encuentra en «The Physiological Principle of Minimum Work Applied to the Angle of Branching of Arteries», *Journal of General Physiology* 9 (1926): 835-841; y «A Relationship between Circumference and Weight in Trees and its Bearing on Branching Angles», *Journal of General Physiology* 10 (1927): 725-739.

D'Arcy Thompson somete a discusión tanto el trabajo de Murray como las observaciones de W. Roux en *On Growth and Form*, 2ª ed. (Cambridge: University Press, 1942), pp. 948-957.

Las dos citas de Leonardo da Vinci se encuentran en Edward MacCurdy, *The Notebooks of Leonardo da Vinci* (Nueva York: Braziller, 1955), pp. 299 y 306.

### Árboles formados según determinadas reglas

Para el trabajo de Ulam, consultar Stanislaw Ulam, «Patterns of Growth of Figures: Mathematical Aspects», en Gyorgy Kepes, editor, *Module, Proportion, Symmetry, Rhythm* (Nueva York: Braziller, 1966), pp. 64-74.

## 6. ÁRBOLES

### Sistema de transporte en los árboles

Ver, a título de ejemplo, Martin H. Zimmermann, «How Sap Moves in Trees», *Scientific American* 208, 3 (marzo 1963).

### Evolución de los árboles

Una breve discusión sobre la evolución aparece en E. J. H. Corner, *The Life of Plants* (Nueva York: World Publishing Co., 1964), de donde procede la figura 112.

Los dibujos de hojas de Klee proceden de la obra de Paul Klee, *The Thinking Eye*, editada por Jürg Spiller (Nueva York: George Wittenborn, 1961).

Sobre algunas cuestiones relativas a *Xanthorrhoea*, *Welwitschia* y otras plantas exóticas, ver Edwin A. Menninger, *Fantastic Trees* (Nueva York: Viking, 1967).

### Modelos básicos de crecimiento

Una excelente descripción del crecimiento de las palmeras se halla en E. J. H. Corner, *The Natural History of Palms* (Berkeley: California University Press, 1966).

El boceto de Le Corbusier, ligeramente modificado, procede de F. Le Lionnais, editor, *Great Currents of Mathematical Thought*, vol. 2, p. 178 (Nueva York: Dover, 1971).

### Filotaxis espiral

Dos excelentes artículos sobre la filotaxis pueden encontrarse en F. J. Richards, «The Geometry of Phyllotaxis and its Origin», en *Growth in Relation to Differentiation and Morphogenesis*. Simposium de la Sociedad para la Biología Experimental, n.º 2 (Nueva York: Academic Press, 1948); y R. Snow, «Problems of Phyllotaxis and Leaf Determination», *Endeavor*, octubre 1955, p. 190.

Daniel T. O'Connell describió su girasol gigante en una carta al editor, *Scientific Monthly* 73, 5 (noviembre 1951).



## 7. BURBUJAS Y POMPAS DE JABÓN

La mejor y más accesible obra sobre el tema es la de C. V. Boys, *Soap-Bubbles. Their Colours and the Forces Which Mold Them* (Nueva York: Dover, 1911/1959).

La obra clásica es, por supuesto, la de J. A. F. Plateau, *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides* (París: Gauthier-Villars, 1873).

Para una nueva discusión de los experimentos realizados con el artificio de las chinchetas y las láminas de vidrio ver Richard Courant y Herbert Robbins, *What is Mathematics?* (Nueva York: Oxford University Press, 1941), 386-397. Un montaje de este tipo realmente sofisticado se describe en Frei Otto, *Information of the Institute for Lightweight Structures* (IL-1) (Universidad de Stuttgart, 1969, distribuido por George Wittenborn, Nueva York).

La microfotografía del cristal que aparece en la figura 150 es  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Ésta y la correspondiente a la figura 151 se reproducen por cortesía del doctor Kent Bowen del Instituto Tecnológico de Massachusetts.

Puede hallarse un excelente material sobre las matemáticas de las burbujas en D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 2ª ed. (Cambridge: University Press, 1942).

El trabajo de lord Kelvin relativo a la espuma se halla en sir William Thompson, «On the Division of Space with Minimum Partitional Area», *Philosophical Magazine* 24, 5 (diciembre 1887): 503-541. El recuento de burbujas de Matzke puede consultarse en Edwin B. Matzke, «The Three-Dimensional Shape of Bubbles in Foam», *American Journal of Botany* 33, 58 (1946).

La cita de Fuller sobre la inconmensurabilidad del número pi procede de R. Buckminster Fuller, «Conceptuality of Fundamental Structures», en Gyorgy Kepes, editor, *Structure in Art and Science* (Nueva York: Braziller, 1965), p. 71.

Podemos determinar las propiedades de una celdilla media de espuma de la siguiente forma: se calcula el número de lados  $n$  del polígono con ángulos de  $109,47^\circ$  dividiendo dicho polígono en triángulos, para lo cual se trazan rectas desde el centro de la figura a cada uno de los vértices. La suma de los ángulos en los triángulos menos los ángulos de las caras del polígono es igual a un ángulo central de  $360^\circ$ , esto es,  $180n - 109,47n = 360$ . Por consiguiente,  $n$ , el número de aristas, es 5,104. Aplicando la regla de Descartes según la cual el valor en grados de un vértice poliédrico es igual a la diferencia entre  $360^\circ$  y el valor de los ángulos que confluyen

en ese vértice, hallamos que  $720/c = 360 - A$ , donde 720 es el número de grados de una esfera y  $A$  es la suma de los ángulos que confluyen en un vértice ( $3 \times 109,47^\circ$ ). Despejando  $c$ , el número de vértices de un poliedro, obtenemos 22,789. A continuación aplicamos la fórmula de Euler que nos dice que el número de vértices,  $c$ , menos el de aristas,  $e$ , más el de las caras,  $f$ , es igual a 2, es decir,  $c - e + f = 2$ . Sabiendo que cada arista une dos caras, podemos escribir que  $22,789 - 5,104 f/2 + f = 2$ , de manera que el número de caras  $f$  es igual a 13,394. Por tanto, como se describe en el texto, la celdilla media en la espuma tiene 22,789 vértices y 13,394 caras, con 5,104 aristas.

## 8. AGRUPAMIENTO Y FRAGMENTACIÓN

Una discusión más completa sobre el fenómeno del agrupamiento, la fragmentación y la tensión superficial es «The Forms of Tissues or Cell-Aggregates», capítulo 7, en D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 2ª ed. (Cambridge: University Press, 1942).

Una excelente introducción sobre las mallas y otros aspectos relativos a la cristalografía puede encontrarse en Bruce Chalmers, James G. Holland, Kenneth A. Jackson y Brady R. Williamson, *Crystallography: A Programmed Course in Three Dimensions* (Nueva York: Meredith Publishing Co., 1965).

El modelo trirradial de la capa de gelatina dispuesta sobre un globo que se contrae se describe en A. J. Bull, *Geological Magazine* 69 (1932): 73-75. El mismo modelo en el cerebro humano es descrito por Le Gros Clark en W. W. Le Gros Clark y P. B. Medawar, editores, *Essays on Growth and Form* (Nueva York: Oxford University Press, 1945).

La descripción de la teoría de la deriva continental de Wegener ha sido reimpressa en Alfred Wegener, *The Origin of Continents and Oceans* (Nueva York: Dover, 1966). Para mayor información sobre la expansión del fondo oceánico, ver Roberts S. Dietz y John C. Holden, «The Breakup of Pangea», *Scientific American*, octubre 1970, 223, 30-41.

Una interesante obra sobre los dibujos de la piel de los animales es la de Adolf Portmann, *Animal Forms and Patterns: A Study of the Appearance of Animals* (Schoken Books, Nueva York, 1967).



